

# 基于 DMNR 模型建立 EB 炉熔炼 TC4 钛合金的 双重多元非线性回归本构方程

王伟<sup>1,2</sup>, 王萌<sup>1</sup>, 蔡军<sup>1</sup>, 张浩泽<sup>2,3</sup>, 史亚鸣<sup>2</sup>, 张晓锋<sup>2</sup>, 黄海广<sup>2</sup>, 王快社<sup>1</sup>

(1. 西安建筑科技大学 冶金工程学院, 陕西 西安 710055)

(2. 云南钛业股份有限公司, 云南 楚雄 651209)

(3. 昆明理工大学 材料科学与工程学院, 云南 昆明 650093)

**摘要:** 通过热模拟压缩实验研究 EB 炉熔炼 TC4 钛合金在应变速率为  $0.01\sim 10\text{ s}^{-1}$ , 变形温度为  $800\sim 1100\text{ }^{\circ}\text{C}$  条件下的热变形行为, 计算合金在不同变形条件下的应变速率敏感性指数  $m$ , 并基于 DMNR 模型建立 EB 炉熔炼 TC4 钛合金的双重多元非线性回归本构方程。结果表明: 在变形开始阶段, 加工硬化占主导作用, 流动应力随着应变的增加而增加, 当达到峰值应力后, 软化作用占主导, 位错开始发生滑移和攀移, 流动应力随着应变的增加而降低。在低温小应变速率下  $m$  值较大, 在高温大应变速率下  $m$  值较小。 $m$  值越大, 对应的显微组织越均匀。采用所建立的非线性回归本构方程能够较好地预测 EB 炉熔炼 TC4 钛合金的流动应力, 预测值与实测值之间的平均绝对相对误差为 5.83%, 相关系数为 0.98。

**关键词:** 电子束冷床熔炼; TC4 钛合金; 应变速率敏感性指数  $m$ ; 本构方程

中图分类号: TG146.23

文献标识码: A

文章编号: 1002-185X(2021)10-3609-12

钛合金具有密度低、比强度高、耐热性高、耐腐蚀性好等一系列优点, 广泛应用于航空航天、生物医疗等领域<sup>[1]</sup>。近年来, 随着科学技术的发展, 中国对钛材的需求量日益增加, 现已成为第三大钛产品消费国<sup>[2]</sup>, 然而, 钛合金熔炼和制备过程比较复杂, 常规的 VAR 熔炼技术制备出的 TC4 钛合金铸锭需要经过 8~15 火次锻造才能进行后期加工, 并且在锻造过程中, 容易开裂, 造成打磨消耗较高、得料率低、生产流程长, 从而导致钛合金的生产成本较高<sup>[3-6]</sup>。如今, 如何生产出成本低质量高的钛合金已成为当前需要解决的关键技术难题。20 世纪 80 年代末, 电子束冷床炉 (EB 炉) 熔炼技术被引入钛产品的生产中, 这种技术与常规的 VAR 熔炼技术相比, 具有免锻直轧的优点, 可以省去多火次锻造工艺和后期的打磨工艺, 使得钛合金的得料率升高, 可以降低约 30% 的生产成本。目前, 欧美各国 EB 炉熔炼技术已经趋于成熟, 中国对于 EB 炉熔炼技术认识较晚, 尚未掌握一套成熟的 EB 炉熔炼 TC4 钛合金板材的轧制技术, 因此, 建立适合 EB 炉熔炼 TC4 钛合金的本构方程, 分析其高温变形行为就显得尤为重要。

本构方程被广泛应用于表征材料热变形行为以及

预测热变形过程中应变速率、应变、应力与温度之间的关系, 是应力与应变速率之间的关系式<sup>[7]</sup>, 可以更直观地观察流变应力的变化规律。目前, 材料变形本构方程主要分为 3 类: 基于物理机制的机理型本构, 基于唯象学现象的唯象型本构和基于人工智能学习的 ANN 型本构<sup>[8]</sup>。使用最广泛的是 Zerilli-Armstrong 模型<sup>[9,10]</sup>、Johnson-Cook 模型<sup>[11]</sup>, Khan-Huang 模型<sup>[12]</sup>。对 TC4 钛合金来说, 应用最广泛的是 Arrhenius 型本构方程。Cai 等人<sup>[13]</sup>考虑应变对流动应力的影响, 针对 TC4 钛合金构建了应变补偿 Arrhenius 型本构模型。尤雪磊等人<sup>[14]</sup>针对细晶 TC4 钛合金, 构建了 Arrhenius 型本构方程和神经网络模型。刘海军等人<sup>[15]</sup>针对等离子烧结态 TC4 钛合金, 构建了应变补偿 Arrhenius 型本构模型。钟应等人<sup>[16]</sup>针对退火态 TC4 钛合金, 构建了 Arrhenius 型本构模型。然而, Arrhenius 型本构方程只考虑了流动应力对应变速率、温度的单独作用, 并没有考虑它们之间的相互作用, 精度不高。Yuan 等人<sup>[17]</sup>考虑了温度、应变速率和应变对应力的单独作用, 和它们之间的交互作用, 提出了多元二次非线性回归方程 (DMNR)。Li 等人<sup>[18]</sup>在 DMNR 方程的基础上增加了分析因素, 以 1060 纯铝为研究对象, 修正了

收稿日期: 2020-11-07

基金项目: 中国博士后科学基金第 65 批面上项目 (2019M653571); 2019 年云南省博士后科研基金

作者简介: 王伟, 男, 1984 年生, 博士, 副教授, 西安建筑科技大学冶金工程学院, 陕西 西安 710055, E-mail: gackmol@163.com

DMNR 方程。但目前的这些研究工作并没有基于多重多元非线性回归分析方程对 EB 炉熔炼 TC4 钛合金的高温变形行为进行分析。

因此，本研究以 EB 炉熔炼 TC4 钛合金铸锭为原材料，对其进行等温恒应变速率压缩实验，分析 TC4 钛合金在不同变形条件下的流变应力曲线，结合微观组织演变特征分析高温变形机制，并基于 DMNR 方程，建立 EB 炉熔炼 TC4 钛合金的双重多元非线性回归方程，为 EB 炉熔炼 TC4 钛合金的后续加工提供理论依据。

## 1 实验

实验材料选自云南钛业股份有限公司提供的经 EB 炉熔炼后的 TC4 铸锭，具体的化学成分如表 1 所示。对该铸锭进行打磨、抛光、腐蚀处理后，在光学显微镜下观察原始组织，如图 1 所示。原始显微组织表现出典型魏氏组织特征，晶界处存在粗大的  $\alpha$  相，晶粒内部  $\alpha$  片层交错排列， $\beta$  相分布在  $\alpha$  片层之间。

沿铸锭轴向取热模拟压缩试样，尺寸为  $\Phi 8 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$ ，在型号为 Gleeble-3800 的热模拟压缩机上进行压缩变形。变形温度为  $800 \sim 1100 \text{ }^\circ\text{C}$ ，温度间隔为  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ ，应变速率为  $0.01, 0.1, 1, 10 \text{ s}^{-1}$ ，变形量为  $50\%$ ，热模拟压缩实验方案示意图如图 2 所示。

## 2 结果与讨论

### 2.1 流动应力分析

从图 3 TC4 合金的真应力-应变曲线中可以明显看出，在相同温度下，流动应力随着应变速率的增

表 1 铸态 TC4 钛合金的化学成分

Table 1 Chemical composition of as-cast TC4 titanium alloy (wt%)

Fe	Al	V	Ti
0.072	5.16	4.52	Bal.

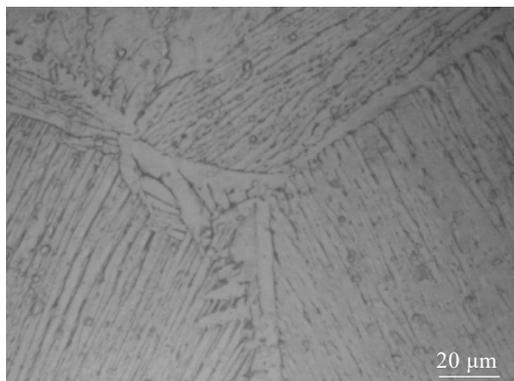


图 1 铸态 TC4 钛合金显微组织

Fig.1 Microstructure of as-cast TC4 titanium alloy

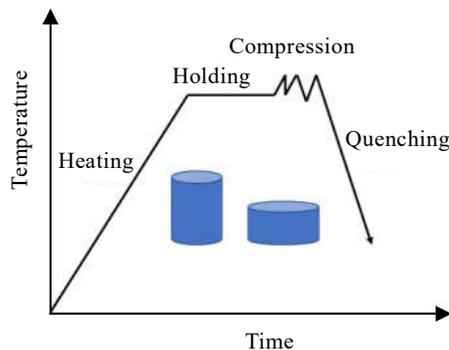


图 2 热模拟压缩实验方案示意图

Fig.2 Schematic diagram of thermal simulation compression experiment

加而增加，这是因为应变速率越大，金属变形时间不足，使得变形比较困难，从而导致了流变应力上升。在相同应变速率下，流动应力随着变形温度的升高而显著下降，这是由于变形温度越高，原子运动越剧烈，原子间键合力降低，临界切应力下降，从而使得流动应力下降。在变形初期，加工硬化占主导作用，流动应力随着应变的增加而显著增高，这是因为在该阶段，位错密度较大，位错增殖速度大于位错湮灭速度。而后，流动应力随着应变的增加而迅速下降，最后保持不变，达到稳态。Semiatin 等人<sup>[19]</sup>发现钛合金的流动软化与变形加热和组织演变有关。当应变速率为  $10 \text{ s}^{-1}$ ，变形温度高于  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$ ，即在单相区进行大应变速率变形时，流动应力曲线出现明显的波动现象，而产生这一现象的原因目前主要有基于位错钉扎作用的静态理论和基于位错增殖作用的动态理论来解释。从图 3e 中可以明显看到，在单相区大应变速率下变形时，流动应力曲线波动较大，这一现象与 Philippart 等人<sup>[20]</sup>的发现相同，他们认为 TC4 钛合金在  $\beta$  单相区热变形时，可以用“动态理论”来解释这种不连续屈服现象及随后的软化作用。从图 3e 中可以看出，这种曲线的波动在应变很低时就已经出现，这说明变形组织经历了持续交替的硬化与软化的作用，且软化机制在很小应变下就会发生<sup>[21]</sup>。

从图 4 TC4 钛合金变形时的峰值应力图中可以看到，TC4 钛合金在双相区（温度低于  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$ ）变形时，温度对峰值应力的影响较大，峰值应力随着温度的增加迅速减小。TC4 钛合金在单相区（变形温度高于  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$ ）变形时，温度对峰值应力影响较小，峰值应力随着温度的增加逐步趋于稳定。分析认为，发生这一现象的原因是：由于在相变点以下变形时，主要的软化机制为针状  $\alpha$  相球化，这与文献[22]的分析一致。

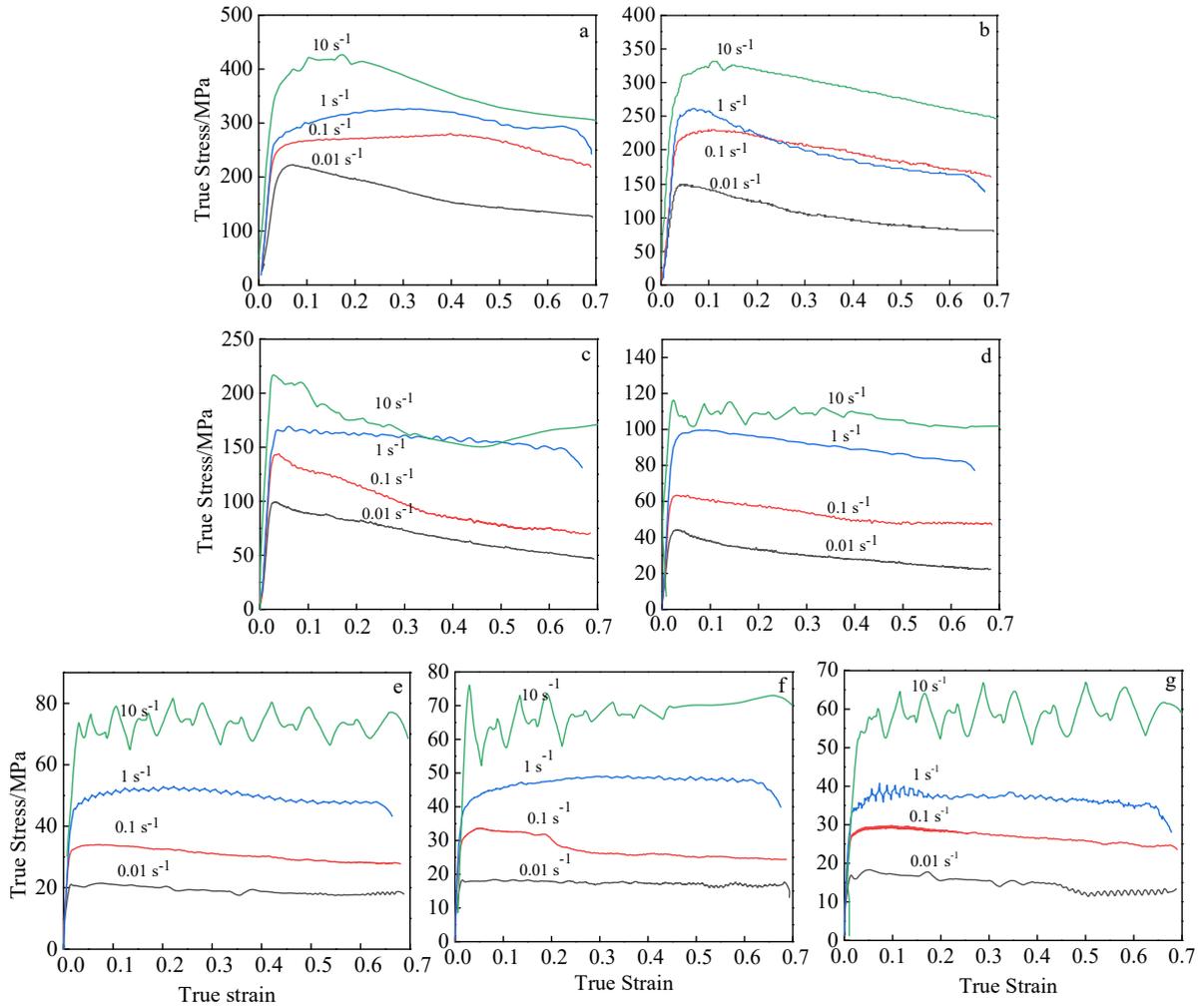


图 3 TC4 合金在不同变形条件下的真应力-应变曲线

Fig.3 True stress-strain curves of TC4 alloy under different deformation conditions: (a) 800 °C, (b) 850 °C, (c) 900 °C, (d) 950 °C, (e) 1000 °C, (f) 1050 °C, and (g) 1100 °C

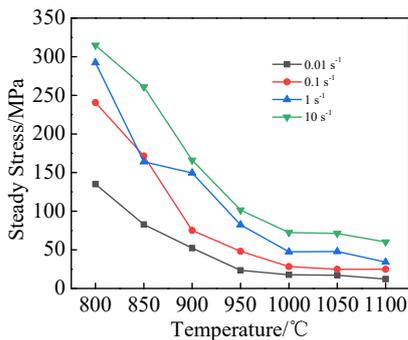


图 4 EB 炉熔炼 TC4 钛合金变形时的峰值应力

Fig.4 Peak stress of TC4 titanium alloy smelted by EB furnace during deformation

随着温度的升高，原子运动加剧，原子间键合力降低，临界切应力下降，使流动应力下降。而高温下合金的软化机制为回复和再结晶，随着变形温度增加到

1000 °C时， $\alpha$ 相全部转化为 $\beta$ 相， $\beta$ 相为体心立方结构，滑移系较多，位错更容易开动，此时加工硬化与软化作用达到平衡，峰值应力随温度的变化不明显。

应变率敏感系数  $m$  表示材料随应变率改变的硬化指数， $m$  值越大，说明材料在变形速度发生变化时，均匀变形的能力越强。 $m$  值的大小体现了热变形组织中的软化机制在单位时间内消耗位错的能力。金属材料的应变率敏感系数  $m$  与流变应力之间的关系可用下式表示<sup>[21]</sup>：

$$\sigma = K\dot{\epsilon}^m \tag{1}$$

$$m = \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \dot{\epsilon}} \tag{2}$$

式(1)中， $\sigma$ 为流动应力， $K$ 为常数， $\dot{\epsilon}$ 为应变率， $m$ 为应变率敏感指数，式(1)两边同时取对数得  $\ln \sigma = \ln K + m \ln \dot{\epsilon}$ ，然后  $\ln \sigma$ 对  $\ln \dot{\epsilon}$ 求偏导得式(2)，即在一定应变与温度情况下， $\ln \sigma - \ln \dot{\epsilon}$ 的斜率，即为应变

速率敏感指数  $m$ 。

图 5a 为不同温度下 TC4 钛合金的  $\ln\sigma$ - $\ln\dot{\epsilon}$  曲线，图 5b 为应变速率敏感因子  $m$  随温度和应变速率变化的 3D 曲面。从图 5b 中可以看到， $m$  值变化曲面呈现马鞍状，有多个极值点出现， $m$  值均大于 0，且不同的  $m$  值对应不同的显微组织。当变形温度为 850 °C 时，随着应变速率的增加  $m$  值逐渐降低，当应变速率为  $0.1 \text{ s}^{-1}$  时， $m$  值达到极大值，对应的显微组织由片层  $\alpha$  相组成，在三叉晶界处观察到较多的等轴晶粒，如图 6a 所示。这主要是由于三叉晶界处畸变能较高导致。随着应变速率增加到  $1 \text{ s}^{-1}$ ， $m$  值变小，合金变形不均匀，晶界处产生空洞缺陷，如图 6b 所示。这主要是由于 TC4 钛合金比热容较小，在热变形过程中，变形热来不及释放，产生绝热温升效应导致。当应变速率为  $0.1 \text{ s}^{-1}$ ，随着变形温度的升高， $m$  值逐渐增大，当变形温度达到 950 °C 时， $m$  值较大，显微组织由大小均一的等轴晶粒组成，如图 6c 所示。当变形温度升高到 1050 °C，即在相变点以上变形时，变形较为均匀，显微组织由在冷却相变过程中生成的针状  $\alpha$  相和晶界处的等轴晶粒组成，如图 6d 所示。

### 2.2 本构方程的试验参数确定

DMNR 本构方程是对材料变形过程中的各个因素及其交互作用全面考虑，而建立起来的一种新的分

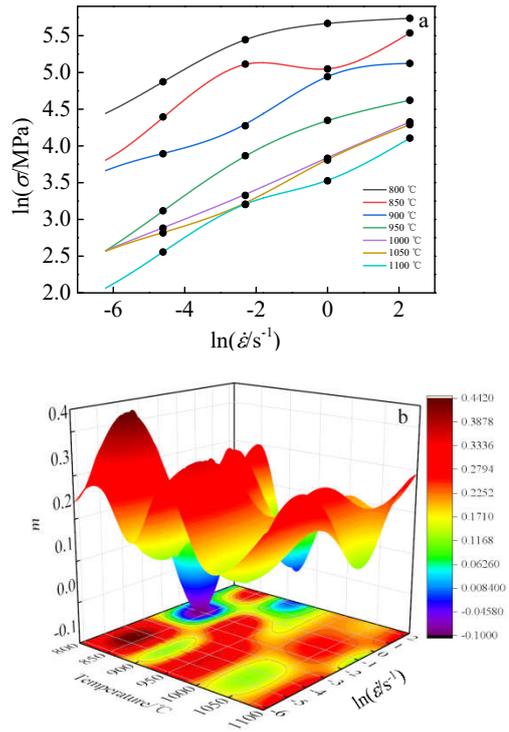


图 5 EB 炉熔炼 TC4 钛合金变形时的  $\ln\sigma$ - $\ln\dot{\epsilon}$  曲线和应变速率敏感指数图

Fig.5  $\ln\sigma$ - $\ln\dot{\epsilon}$  plots (a) and strain rate sensitivity index  $m$  (b) of EB furnace smelting TC4 titanium alloy during deformation

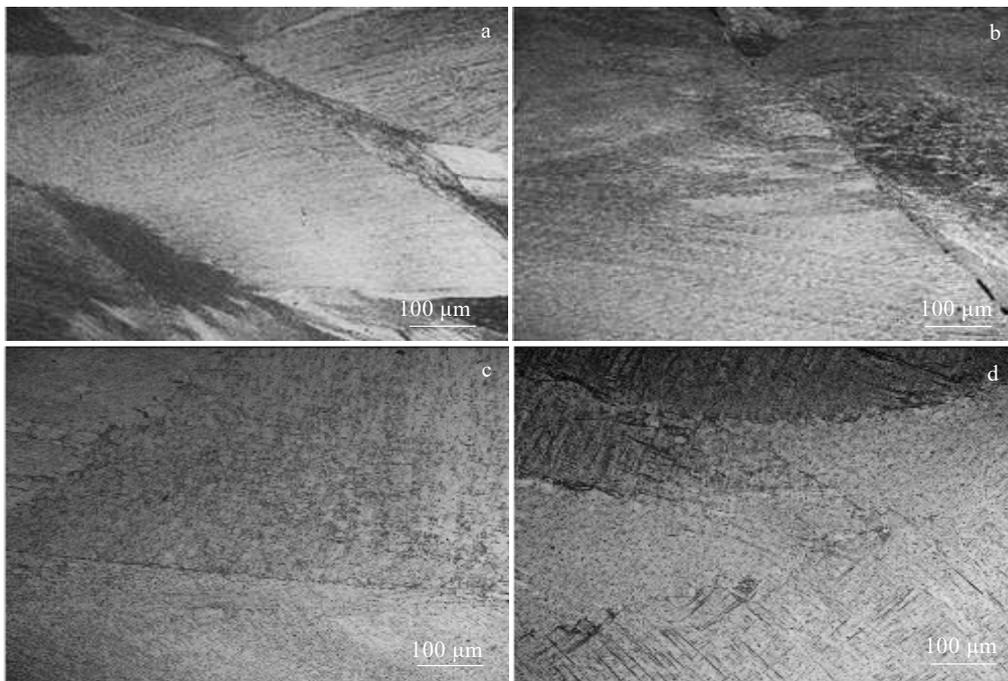


图 6 EB 炉熔炼 TC4 钛合金的金相显微组织

Fig.6 Metallographic microstructures of TC4 titanium alloy smelted by EB furnace: (a) 850 °C/ $0.1 \text{ s}^{-1}$ , (b) 850 °C/ $1 \text{ s}^{-1}$ , (c) 950 °C/ $0.1 \text{ s}^{-1}$ , and (d) 1050 °C/ $0.1 \text{ s}^{-1}$

析材料流动应力的本构方程, DMNR 本构方程主要由流动应力和影响因素组成。如图 7 所示, 实验因子  $x_i$  为应变、应变速率和温度, 材料因子  $y_i$  为实验因子对流动应力的单独作用和相互作用, 权重因子  $\psi_j$  为  $y_i$  对  $x_i$  单独作用和相互作用的相对权重, 分析因子  $f_i$  为分析因素对流动应力的影响函数。流动应力  $\sigma$  为实验因子  $x_i$  和分析因子  $f_i$  的泛函。

分析因子  $f_i$  由实验因子  $x_i$  和权重因子  $\psi_j$  两部分组成, 分析因子  $f_i$  是根据塑性变形的物理理论得出的, 如下所示<sup>[23]</sup>:

$$\sigma = N\varepsilon^n \tag{3}$$

$$\sigma = M\dot{\varepsilon}^m \tag{4}$$

$$\sigma = S \exp\left(\frac{mQ}{RT}\right) = S \exp\left(\frac{s'}{T}\right) = S \exp(s) \tag{5}$$

其中,  $Q$  为形变活化能,  $R$  为气体常数,  $s'=mQ/R$ ,  $n$ ,  $m$  和  $s$  为材料参数 ( $y_i$ ),  $N$ ,  $M$  和  $S$  为相对应的权重 ( $\psi_j$ )。对上述的方程式两边同时取对数得:

$$\ln \sigma = \ln N + n \ln \varepsilon \tag{6}$$

$$\ln \sigma = \ln M + m \ln \dot{\varepsilon} \tag{7}$$

$$\ln \sigma = \ln S + \frac{mQ}{RT} = \ln S + \frac{s'}{T} = \ln S + s \tag{8}$$

DMNR 本构方程的求解参数如表 2 所示, 首先分别求出实验因子单独作用和它们之间相互作用的流动应力, 然后将它们代入公式(6)~(8)求出材料因子  $y_i$  和权重因子  $\psi_j$ , 继而由函数关系求出分析因子  $f_i$ , 最后进行回归分析, 求出流动应力  $\sigma$ 。

由于 TC4 钛合金是双相钛合金, 因此, 在计算时,

将单相区与双相区进行分开计算和拟合。本研究以双相区( $\alpha+\beta$  相区)为例详细阐述求解过程。首先求出  $\bar{\sigma}(\varepsilon)$  的应力值,  $\bar{\sigma}(\varepsilon) = \sum_{T-\dot{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / (K_T K_{\dot{\varepsilon}})$ , 其中  $\sigma(\varepsilon)$  为所有温度和应变速率的应力值,  $K_T$  和  $K_{\dot{\varepsilon}}$  分别为温度和应变速率的个数, 经金相法测得 TC4 钛合金的相变点大约为 1000 °C, 在本研究选取的双相区 ( $\alpha+\beta$  相区) 温度为 800, 850, 900, 950 °C。选取的应变速率为 0.01, 0.1, 1, 10 s<sup>-1</sup>, 选取的应变为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 和 0.7, 即  $K_T$  等于 4,  $K_{\dot{\varepsilon}}$  等于 4,  $K_{\varepsilon}$  等于 7。在图 8a 中, 取  $\ln[\bar{\sigma}(\varepsilon)] - \ln \varepsilon$  相邻两点之间

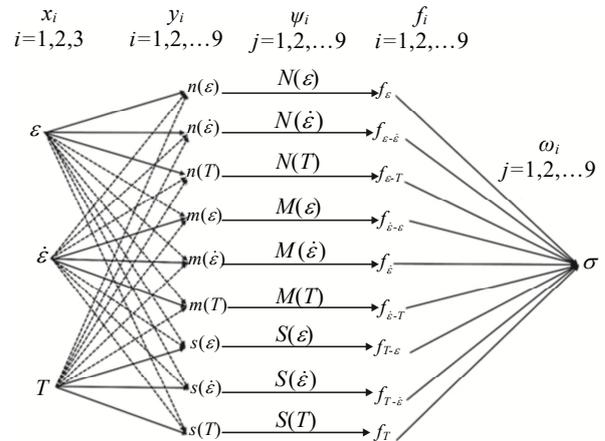


图 7 流动应力与试验参数和分析参数之间的关系

Fig.7 Relationship between flow stress and test parameters and analysis parameters

表 2 基于修正双多重非线性回归的本构方程参数

Table 2 Parameter of constitutive equation based on modified double multiple nonlinear regression

	Strain, $\varepsilon$	Strain rate, $\dot{\varepsilon}$	Temperature, $T$	$f_i$
	$\bar{\sigma}(\varepsilon) = \sum_{T-\dot{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / (K_T K_{\dot{\varepsilon}})$	$\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}-\varepsilon) = \sum_T \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / K_T$	$\bar{\sigma}(T-\varepsilon) = \sum_{\dot{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / K_{\dot{\varepsilon}}$	$f_1 = f_{\varepsilon} = N(\varepsilon) \varepsilon^{n(\varepsilon)}$ $f_2 = f_{\varepsilon-\dot{\varepsilon}} = N(\dot{\varepsilon}) \varepsilon^{n(\dot{\varepsilon})}$
Flow stress	$\bar{\sigma}(\varepsilon-\dot{\varepsilon}) = \sum_T \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / K_T$	$\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}) = \sum_{\varepsilon-T} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / (K_{\varepsilon} K_T)$	$\bar{\sigma}(T-\dot{\varepsilon}) = \sum_{\varepsilon} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / K_{\varepsilon}$	$f_3 = f_{\varepsilon-T} = N(T) \varepsilon^{n(T)}$ $f_4 = f_{\varepsilon-\varepsilon} = M(\varepsilon) \varepsilon^{m(\varepsilon)}$
	$\bar{\sigma}(\varepsilon-T) = \sum_{\dot{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / K_{\dot{\varepsilon}}$	$\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}-T) = \sum_{\varepsilon} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / K_{\varepsilon}$	$\bar{\sigma}(T) = \sum_{\varepsilon-\dot{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / (K_{\varepsilon} K_{\dot{\varepsilon}})$	$f_5 = f_{\dot{\varepsilon}} = M(\dot{\varepsilon}) \dot{\varepsilon}^{m(\dot{\varepsilon})}$ $f_6 = f_{\dot{\varepsilon}-T} = M(T) \dot{\varepsilon}^{m(T)}$
Equation	$\sigma = N\varepsilon^n$ $\ln \sigma = \ln N + n \ln \varepsilon$ $n(\varepsilon), n(\dot{\varepsilon}), n(T)$ $\ln[N(\varepsilon)], \ln[N(\dot{\varepsilon})], \ln[N(T)]$	$\sigma = M\dot{\varepsilon}^m$ $\ln \sigma = \ln M + m \ln \dot{\varepsilon}$ $m(\varepsilon), m(\dot{\varepsilon}), m(T)$ $\ln[M(\varepsilon)], \ln[M(\dot{\varepsilon})], \ln[M(T)]$	$\sigma = S \exp(s/T)$ $\ln \sigma = \ln S + s/T$ $s(\varepsilon), s(\dot{\varepsilon}), s(T)$ $\ln[S(\varepsilon)], \ln[S(\dot{\varepsilon})], \ln[S(T)]$	$f_7 = f_{T-\varepsilon} = S(\varepsilon) \exp[s(\varepsilon)/T]$ $f_8 = f_{T-\dot{\varepsilon}} = S(\dot{\varepsilon}) \exp[s(\dot{\varepsilon})/T]$ $f_9 = f_T = S(T) \exp[s(T)/T]$
Stress calculation	$\sigma = \sigma_0 \prod_{j=1}^9 f_j^{\omega_j}$			

的斜率与截距, 即为  $n(\varepsilon)$  和  $\ln[N(\varepsilon)]$ 。将不同应变下的  $\ln[N(\varepsilon)]$  和  $n(\varepsilon)$  进行多项式拟合, 拟合结果见式(9)和(10)。 $\ln[N(\varepsilon)]-\varepsilon$  和  $n(\varepsilon)-\varepsilon$  的关系如图 8b 和图 8c 所示。

$$\ln[N(\varepsilon)] = 5.184\ 04 - 0.277\ 37\varepsilon - 6.952\ 43\varepsilon^2 + 21.407\ 87\varepsilon^3 - 17.895\ 83\varepsilon^4 \quad (9)$$

$$n(\varepsilon) = -0.16 + 2.450\ 63\varepsilon - 19.178\ 15\varepsilon^2 + 45.413\ 63\varepsilon^3 - 35.190\ 62\varepsilon^4 \quad (10)$$

同理, 首先求出  $\bar{\sigma}(\varepsilon-\dot{\varepsilon})$  的应力值,  $\bar{\sigma}(\varepsilon-\dot{\varepsilon}) = \sum_T \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / K_T$ , 在图 9a 中, 取  $\ln[\bar{\sigma}(\varepsilon-\dot{\varepsilon})]-\ln\varepsilon$  相邻两点之间的斜率与截距, 即为  $n(\dot{\varepsilon})$  和  $\ln[N(\dot{\varepsilon})]$ 。将不同应变下的  $\ln[N(\dot{\varepsilon})]$  和  $n(\dot{\varepsilon})$  进行多项式拟合, 拟合结果见式(11),(12)。 $\ln[N(\dot{\varepsilon})]-\ln\dot{\varepsilon}$  和  $n(\dot{\varepsilon})-\ln\dot{\varepsilon}$  的关系如图 9b 和图 9c 所示。

$$\ln[N(\dot{\varepsilon})] = 5.103\ 32 + 0.068\ 36 \ln(\dot{\varepsilon}) - 0.005\ 6 \ln(\dot{\varepsilon})^2 + 0.005\ 21 \ln(\dot{\varepsilon})^3 \quad (11)$$

$$n(\dot{\varepsilon}) = -0.109\ 85 - 0.002\ 21 \ln(\dot{\varepsilon}) - 0.005\ 48 \ln(\dot{\varepsilon})^2 + 0.000\ 849 \ln(\dot{\varepsilon})^3 \quad (12)$$

同理, 首先求出  $\bar{\sigma}(\varepsilon-T)$  的应力值,  $\bar{\sigma}(\varepsilon-T) = \sum_{\dot{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / K_{\dot{\varepsilon}}$ , 在图 10a 中, 取  $\ln[\bar{\sigma}(\varepsilon-T)]-\ln\varepsilon$  相

邻两点之间的斜率与截距, 即为  $n(T)$  和  $\ln[N(T)]$ 。将不同应变下的  $\ln[N(T)]$  和  $n(T)$  进行多项式拟合, 拟合结果见式(13),(14)。 $\ln[N(T)]-\frac{T}{100}$  和  $n(T)-\frac{T}{100}$  的关系

如图 10b 和图 10c 所示。

$$\ln[N(T)] = 15.159\ 83 - 0.901\ 32(T/100)^1 \quad (13)$$

$$n(T) = 183.8462 - 46.639(T/100)^1 + 3.929\ 44(T/100)^2 - 0.110\ 04(T/100)^3 \quad (14)$$

同理, 首先求出  $\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon})$  的应力值,  $\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}) = \sum_{\varepsilon-T} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / (K_{\dot{\varepsilon}} K_T)$ ,  $\ln[\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon})]$  与  $\ln(\dot{\varepsilon})$  线性相关, 拟合结果见式(15)。图 11 中斜率与截距, 即为  $m(\dot{\varepsilon})$  和  $\ln[m(\dot{\varepsilon})]$ 。

$$\ln[\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon})] = 5.199\ 48 + 0.131\ 41 \ln(\dot{\varepsilon}) \quad (15)$$

同理, 首先求出  $\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}-\varepsilon)$  的应力值,  $\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}-\varepsilon) = \sum_T \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) / K_T$ , 在图 12a 中, 取  $\ln[\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}-\varepsilon)]-\ln(\dot{\varepsilon})$  相

邻两点之间的斜率与截距, 即为  $m(\varepsilon)$  和  $\ln[M(\varepsilon)]$ 。将不同应变下的  $\ln[M(\varepsilon)]$  和  $m(\varepsilon)$  进行多项式拟合, 拟合结果见式(16),(17)。 $\ln[M(\varepsilon)]-\varepsilon$  和  $m(\varepsilon)-\varepsilon$  的关系如图

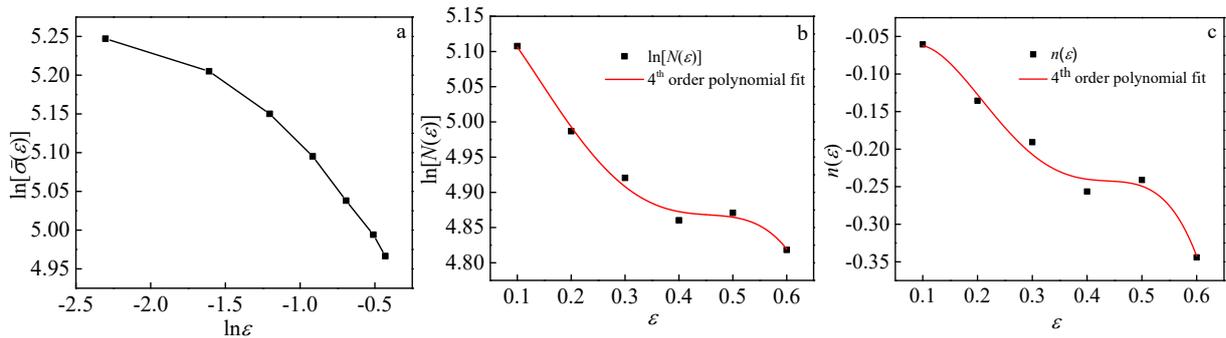


图 8 不同试验参数的关系

Fig.8 Relationship curves of different test parameters: (a)  $\ln[\bar{\sigma}(\varepsilon)]-\ln\varepsilon$ , (b)  $\ln[N(\varepsilon)]-\varepsilon$ , and (c)  $n(\varepsilon)-\varepsilon$

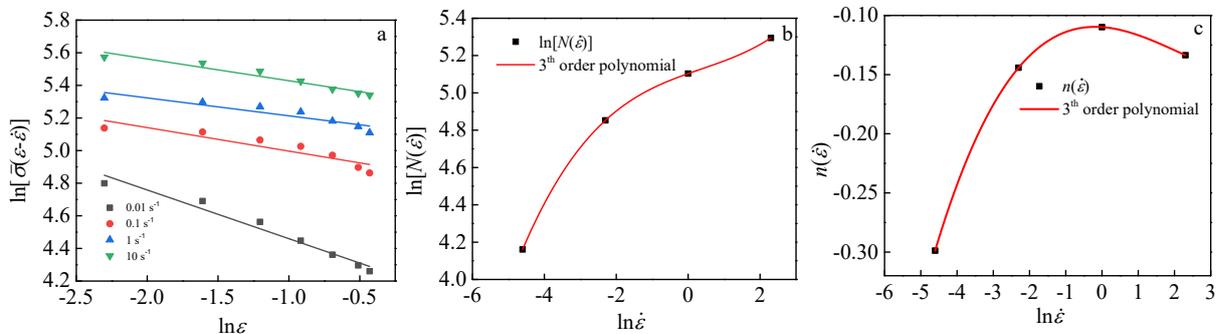


图 9 不同试验参数的关系

Fig.9 Relationship curves of different test parameters: (a)  $\ln[\bar{\sigma}(\varepsilon-\dot{\varepsilon})]-\ln\varepsilon$ , (b)  $\ln[N(\dot{\varepsilon})]-\ln\dot{\varepsilon}$ , and (c)  $n(\dot{\varepsilon})-\ln\dot{\varepsilon}$

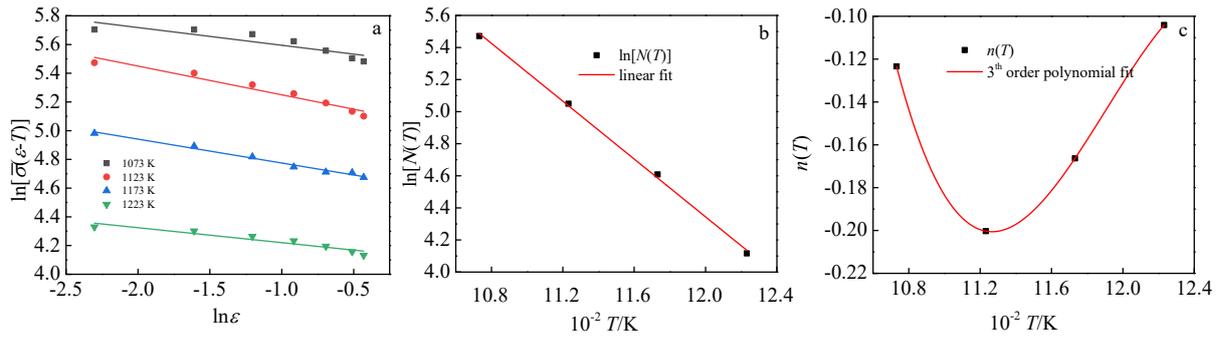


图 10 不同试验参数的关系

Fig.10 Relationship curves of different test parameters: (a)  $\ln[\bar{\sigma}(\varepsilon-T)]-\ln\varepsilon$ , (b)  $\ln[N(T)]-\frac{T}{100}$ , and (c)  $n(T)-\frac{T}{100}$

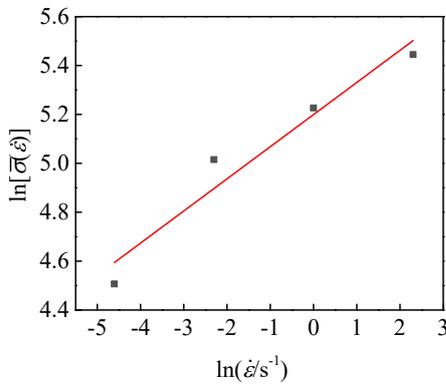


图 11  $\ln[\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon})]-\ln(\dot{\varepsilon}/s^{-1})$  的关系曲线  
Fig.11 Plot of  $\ln[\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon})]-\ln(\dot{\varepsilon}/s^{-1})$

12b 和图 12c 所示。

$$\ln[M(\dot{\varepsilon})]=5.389\ 03-0.495\ 35\varepsilon \quad (16)$$

$$m(\dot{\varepsilon})=0.097\ 42+0.119\ 05\varepsilon^1-0.056\ 76\varepsilon^2 \quad (17)$$

同理, 首先求出  $\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}-T)$  的应力值,  $\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}-T)=\sum_{\varepsilon} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)/K_{\varepsilon}$ , 在图 13a 中, 取  $\ln[\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}-T)]-\ln(\dot{\varepsilon})$  相邻两点之间的斜率与截距, 即为  $m(T)$  和  $\ln[M(T)]$ 。将不同应变下的  $\ln[M(T)]$  和  $m(T)$  进行多项式拟合, 拟合结果见式(18),(19)。 $\ln[M(T)]-\frac{T}{1000}$  和  $m(T)-\frac{T}{1000}$  的关系如图 13b 和图 13c 所示。

$$\ln(M(T))=-14.254\ 98+42.893\ 54(T/1000)^1-22.643(T/1000)^2 \quad (18)$$

$$m(T)=-115.941\ 04+305.920\ 47(T/1000)^1-268.834\ 81(T/1000)^2+78.773\ 33(T/1000)^3 \quad (19)$$

同理, 首先求出  $\bar{\sigma}(T)$  的应力值,  $\bar{\sigma}(T)=\sum_{\varepsilon-\dot{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)/(K_{\varepsilon}K_{\dot{\varepsilon}})$ , 在图 14 中, 取  $\ln[\bar{\sigma}(T)]-1000/T$

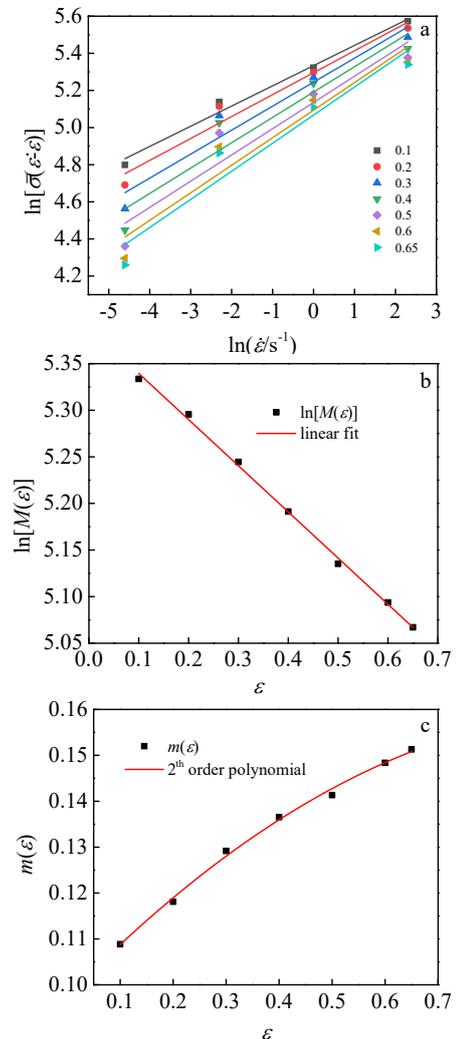


图 12 不同试验参数的关系

Fig.12 Relationship curves of different test parameters: (a)  $\ln[\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}-\varepsilon)]-\ln(\dot{\varepsilon}/s^{-1})$ , (b)  $\ln[M(\dot{\varepsilon})]-\varepsilon$ , and (c)  $m(\dot{\varepsilon})-\varepsilon$

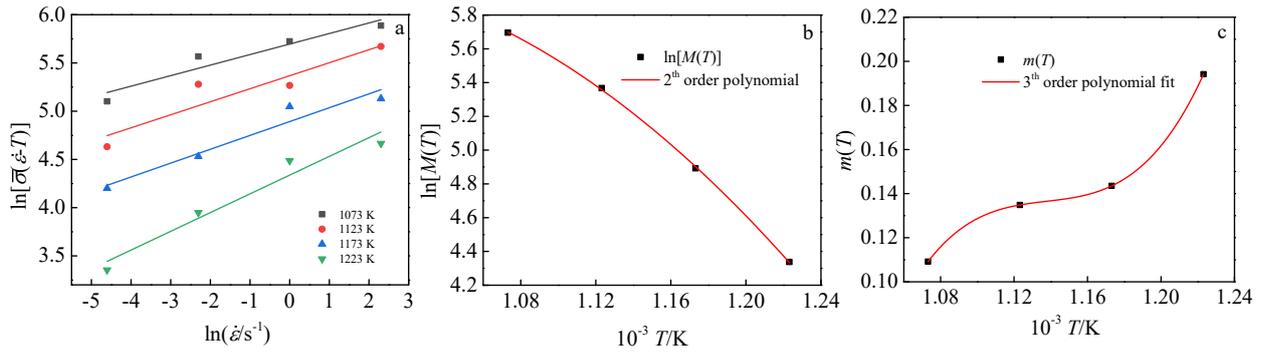


图 13 不同试验参数关系

Fig.13 Relationship curves of different test parameters: (a)  $\ln[\bar{\sigma}(\dot{\epsilon}-T)]-\ln(\dot{\epsilon}/s^{-1})$ , (b)  $\ln[M(T)]-\frac{T}{1000}$ , and (c)  $m(T)-\frac{T}{1000}$

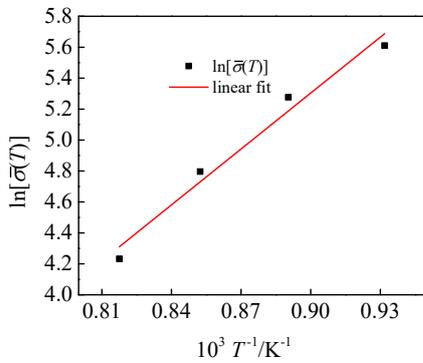


图 14  $\ln[\bar{\sigma}(T)]-\frac{1000}{T}$  关系曲线

Fig.14 Plot of  $\ln[\bar{\sigma}(T)]-\frac{1000}{T}$

相邻两点之间的斜率与截距，即为  $S(T)$ 和  $\ln[S(T)]$ 。将不同应变下的  $\ln[S(T)]$ 和  $s(T)$ 进行多项式拟合，拟合结果见式(20)。

$$\ln[\bar{\sigma}(T)]=-5.537\ 97+12.046\ 38(1000/T)^1 \quad (20)$$

同理，将不同应变下的  $\ln[S(\epsilon)]$ 和  $s(\epsilon)$ 进行多项式拟合，拟合结果见式(21)，(22)。  $\ln[S(\epsilon)]-\epsilon$ 与  $s(\epsilon)-\epsilon$ 的关系如图 15a 和图 15b 所示。将不同应变速率下的  $\ln[S(\dot{\epsilon})]$ 和  $s(\dot{\epsilon})$ 进行多项式拟合，拟合结果见式(23)，

$$\begin{aligned} \ln[S(\epsilon)]= & -4.0755-23.830\ 04\epsilon^1+157.062\ 73\epsilon^2 \\ & -576.125\ 58\epsilon^3+1147.076\ 98\epsilon^4-1111.070\ 71\epsilon^5 \\ & +400.589\ 23\epsilon^6 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} s(\epsilon)= & 11.147\ 89+13.689\ 83\epsilon^1-67.175\ 53\epsilon^2+190.1009\epsilon^3 \\ & -301.698\ 01\epsilon^4+186.9113\epsilon^5 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \ln[S(\dot{\epsilon})]= & -3.8533+1.374\ 29\ln(\dot{\epsilon})-0.4218\ln(\dot{\epsilon})^2 \\ & -0.107\ 87\ln(\dot{\epsilon})^3 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} s(\dot{\epsilon})= & 10.291\ 16-1.457\ 85\ln(\dot{\epsilon})+0.473\ 17\ln(\dot{\epsilon})^2 \\ & +0.1254\ln(\dot{\epsilon})^3 \end{aligned} \quad (24)$$

将以上求得的参数代入式(25)，求得分析因子  $f_i$ ，DMNR 本构方程的表达式如式(26)所示，对式(26)两边同时取自然对数得式(27)，利用 EXCEL 软件对  $\ln\sigma$  和  $\ln f_i$  进行多元回归分析，求得截距  $\ln\sigma_0$  和权重因子  $\omega_i$ ，具体的求解参数如表 3 和表 4 所示。

$$\begin{aligned} f_1 &= f_\epsilon = N(\epsilon)\epsilon^{n(\epsilon)} \\ f_2 &= f_{\epsilon-\dot{\epsilon}} = N(\dot{\epsilon})\epsilon^{n(\dot{\epsilon})} \\ f_3 &= f_{\epsilon-T} = N(T)\epsilon^{n(T)} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f_4 &= f_{\dot{\epsilon}-\epsilon} = M(\epsilon)\epsilon^{m(\epsilon)} \\ f_5 &= f_{\dot{\epsilon}} = M(\dot{\epsilon})\dot{\epsilon}^{m(\dot{\epsilon})} \\ f_6 &= f_{\dot{\epsilon}-T} = M(T)\dot{\epsilon}^{m(T)} \\ f_7 &= f_{T-\epsilon} = S(\epsilon)\exp[s(\epsilon)/T] \\ f_8 &= f_{T-\dot{\epsilon}} = S(\dot{\epsilon})\exp[s(\dot{\epsilon})/T] \\ f_9 &= f_T = S(T)\exp[s(T)/T] \end{aligned}$$

$$\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}, T) = \sigma_0 f_\epsilon^{\omega_1} f_{\epsilon-\dot{\epsilon}}^{\omega_2} f_{\dot{\epsilon}-\epsilon}^{\omega_3} f_{\dot{\epsilon}}^{\omega_4} f_{\dot{\epsilon}-T}^{\omega_5} f_{T-\epsilon}^{\omega_6} f_{T-\dot{\epsilon}}^{\omega_7} f_T^{\omega_8} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \ln\sigma = & \ln\sigma_0 + \omega_1\ln f_\epsilon + \omega_2\ln f_{\epsilon-\dot{\epsilon}} + \omega_3\ln f_{\dot{\epsilon}-\epsilon} \\ & + \omega_4\ln f_{\dot{\epsilon}} + \omega_5\ln f_{\dot{\epsilon}-T} + \omega_6\ln f_{T-\epsilon} \\ & + \omega_7\ln f_{T-\dot{\epsilon}} + \omega_8\ln f_T \end{aligned} \quad (27)$$

### 2.3 验证本构方程

为验证 DMNR 本构方程的准确性，本研究将计算流动应力值与实验流动应力值进行了对比，如图 16 所示，从图中可以看到，计算应力值与实验应力值差距不大，应变速率越小，拟合度越高，应变速率为  $10\ s^{-1}$  时，计算应力值在实验真应力-应变曲线上小范围浮动，单相区的拟合度高于双相区。

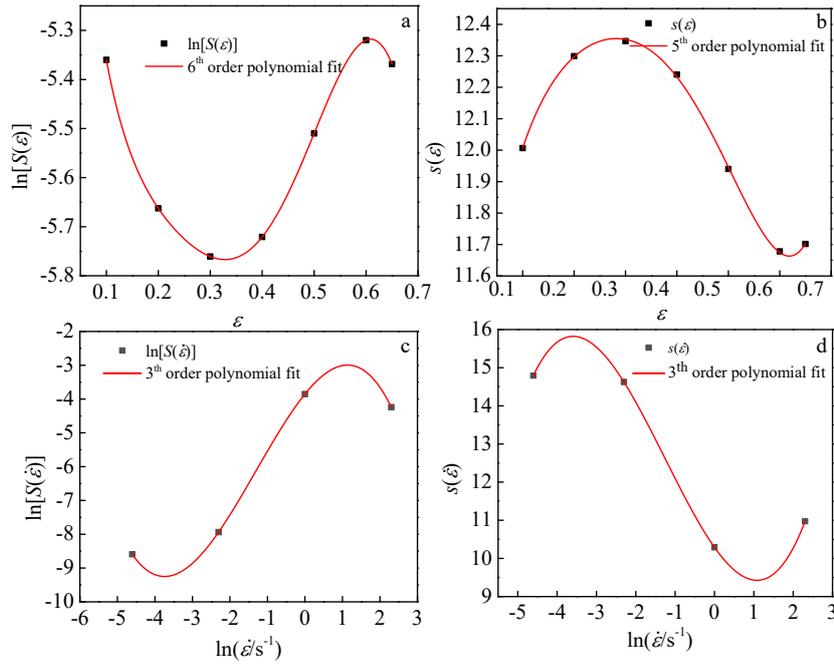


图 15 不同试验参数关系

Fig.15 Relationship curves of different test parameters: (a)  $\ln[S(\varepsilon)]-\varepsilon$ , (b)  $s(\varepsilon)-\varepsilon$ , (c)  $\ln[S(\dot{\varepsilon})]-\ln(\dot{\varepsilon}/s^{-1})$ , and (d)  $s(\dot{\varepsilon})-\ln(\dot{\varepsilon}/s^{-1})$

为了验证 DMNR 方程的准确性, 引入相关系数  $R$  和平均绝对相对误差 (AARE) 进行量化分析, 其表达式见式(28)和式(29):

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})(P_i - \bar{P})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 \sum_{i=1}^n (P_i - \bar{P})^2}} \quad (28)$$

$$AARE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{E_i - P_i}{E_i} \right| \times 100\% \quad (29)$$

其中,  $E_i$  为实验流动应力值,  $\bar{E}$  为平均实验流动应力值,  $P_i$  为计算应力值,  $\bar{P}$  为平均计算应力值,  $n$  为流动应力值的个数。对计算应力与实验应力进行线性拟合, 如图 17 所示, 从图中可以看到, 计算应力在实验

应力的附近波动。经计算得双相区和单相区的相关系数  $R$  分别为 0.98 和 0.99, AARE 分别为 6.88% 和 4.44%, 双相区加单相区的相关系数  $R$  为 0.98, AARE 为 5.83%。

除此之外, 相对误差的大小也可以衡量本构方程的准确性, 其表达式见式(30):

$$\text{Relative error} = \left( \frac{E_i - P_i}{E_i} \right) \times 100\% \quad (30)$$

相对误差的统计分析见图 18, 从图中可以看出, 流动应力值的相对误差分析呈近似正态分布, 大部分集中在  $-10\% \sim 10\%$  范围, 平均相对误差为  $-0.28\%$ , 最小相对误差为  $-24.87\%$ , 最大相对误差为  $14.79\%$ , 由此可见, 该本构方程具有较高的准确性。

表 3  $\alpha+\beta$  相区实验参数

Table 3 Experimental parameters of  $\alpha+\beta$  phase region

$\sigma_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$	$\omega_8$	$\omega_9$
15.54	-0.34	0.25	0.64	0.84	-1.28	0.45	-0.30	0.71	-0.51

表 4  $\beta$  相区实验参数

Table 4 Experimental parameters of  $\beta$  phase region

$\sigma_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$	$\omega_8$	$\omega_9$
0.16	-0.01	0.75	0.44	0.23	-0.67	0.71	0.003	-0.01	-0.11

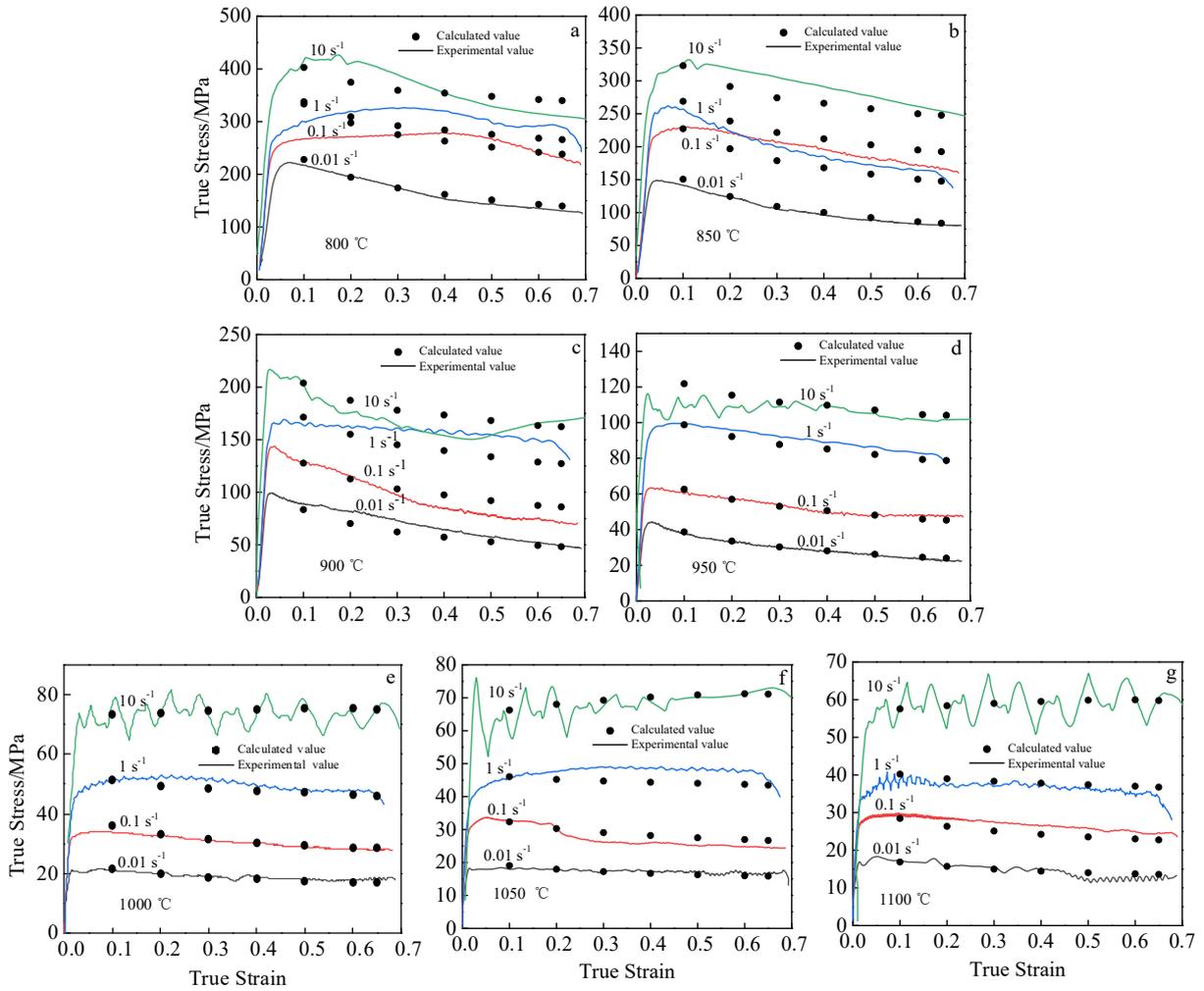


图 16 EB 炉熔炼 TC4 钛合金应力模型的计算结果与实验结果对比

Fig.16 Comparison of calculated results and experimental results of stress model of EB furnace melting TC4 titanium alloy

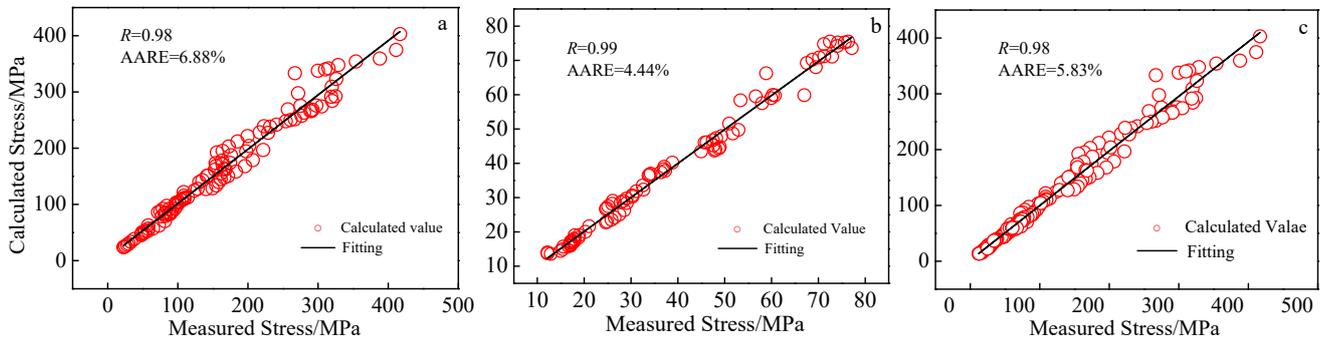


图 17 TC4 钛合金在不同相区实验应力与预测流动应力的相关性

Fig.17 Correlation between experimental stress and predicted flow stress of TC4 titanium alloy in different phase regions:

(a)  $\alpha + \beta$  phase area, (b)  $\beta$  phase area, and (c)  $\alpha + \beta$  phase area +  $\beta$  phase area

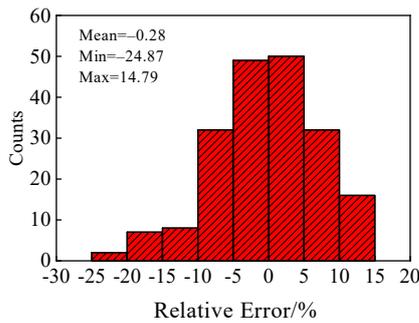


图 18 相对误差的统计分析

Fig.18 Statistical analysis of relative error

### 3 结 论

1) 在变形开始阶段, 加工硬化占主导作用, 流动应力随着应变的增加而增加, 当达到峰值应力后, 软化作用占主导, 位错开始发生滑移和攀移, 流动应力随着应变的增加而降低。

2) 不同的应变速率敏感性指数  $m$  对应不同的显微组织, 且  $m$  值越大, 对应的显微组织越均匀。EB 炉熔炼 TC4 钛合金在低温小应变速率下  $m$  值较大, 在高温大应变速率下  $m$  值较小。

3) 针对 EB 炉熔炼 TC4 钛合金, 分别在  $(\alpha+\beta)$  双相区和  $\beta$  单相区基于 DMNR 模型建立了双重多元非线性本构方程, 其预测流动应力的精度较高, 平均绝对相对误差分别为 6.88% 和 4.44%, 相关系数分别为 0.98 和 0.99。双相区加单相区的相关系数为 0.98, 平均绝对相对误差为 5.83%。

#### 参考文献 References

- [1] Chen Zhenhua(陈振华). *Titanium and Titanium Alloys*(钛与钛合金)[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2005
- [2] Liu Qianli(刘千里). *Thesis for Doctorate*(博士论文)[D]. Kunming: Kunming University of Science and Technology, 2018
- [3] Wu Wenhui(吴文琥), Gao Wenchao(高文超), Liu Xuan(刘璇) *et al.* *Hot Working Technology*(热加工工艺)[J], 2017, 46(7): 183
- [4] Ma Ruixia(马蕊侠), Shi Donggang(史栋刚), Han Dong(韩栋) *et al.* *Hot Working Technology*(热加工工艺)[J], 2016, 45(11): 25
- [5] Li Rui(李瑞), Duan Xiaohui(段晓辉), Yue Xu(岳旭) *et al.* *Titanium Industry Progress*(钛工业进展)[J], 2018, 35(5): 33
- [6] Hao Xiaobo(郝晓博), Li Bobo(李渤渤), Liu Yinqi(刘茵琪) *et al.* *Heat Treatment of Metals*(金属热处理)[J], 2019, 44(2): 50
- [7] Zeng Z P, Stefan J, Zhang Y S. *Materials Science and Engineering A*[J], 2009, 505(1-2): 116
- [8] Yuan Zhanwei(袁战伟). *Thesis for Doctorate*(博士论文)[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2014
- [9] Zerilli F J, Armstrong R W. *Journal of Applied Physics*[J], 1987, 61(5): 1816
- [10] Samantaray D, Mandal S, Borah U *et al.* *Materials Science and Engineering A*[J], 2009, 526(1-2): 1
- [11] Johnson G R, Cook W H. *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*[C]. Amsterdam: International Ballistics Committee, 1983: 541
- [12] Khan A S, Huang S. *International Journal of Plasticity*[J], 1992, 8(4): 397
- [13] Cai Jun, Li Fuguo, Liu Taiying *et al.* *Materials & Design*[J], 2011, 32(3): 1144
- [14] You Xuelei(尤雪磊), Hua Jianshe(华建社), Yao Wei(姚渭) *et al.* *Transactions of Materials and Heat Treatment*(材料热处理学报)[J], 2015, 36(8): 237
- [15] Liu Haijun(刘海军), Zhang Zhimin(张治民), Xu Jian(徐健) *et al.* *Journal of Plasticity Engineering*(塑性工程学报)[J], 2019, 26(6): 263
- [16] Zhong Ying(钟应), Liang Yilong(梁益龙), Yang Ming(杨明). *Ordnance Material Science and Engineering*(兵器材料科学与工程)[J], 2013, 36(3): 86
- [17] Yuan Zhanwei, Li Fuguo, Qiao Huijuan *et al.* *Materials Science and Engineering A*[J], 2013, 578: 260
- [18] Li Pan, Li Fuguo, Cai Jun *et al.* *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*[J], 2016, 26(4): 1079
- [19] Semiatin S L, Seetharaman V, Weiss I. *Materials Science and Engineering A*[J], 1999, 263(2): 257
- [20] Philippart I, Rack H J. *Materials Science and Engineering A*[J], 1998, 243(1): 196
- [21] Jing Lei(荆磊). *Thesis for Doctorate*(博士论文)[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2017
- [22] Zhang Yong(张勇), Wang Fukang(王富康), Qu Duo(屈铎) *et al.* *Rare Metal Materials and Engineering*(稀有金属材料与工程)[J], 2020, 49(3): 944
- [23] Cai Jun, Wang Kuaishe, Shi Jiamin *et al.* *High Temperature Materials and Processes*[J], 2018, 37(1): 75

## Dual Multivariate Nonlinear Regression Constitutive Equation of EB Furnace Smelting TC4 Titanium Alloy Based on DMNR Model

Wang Wei<sup>1,2</sup>, Wang Meng<sup>1</sup>, Cai Jun<sup>1</sup>, Zhang Haoze<sup>2,3</sup>, Shi Yaming<sup>2</sup>, Zhang Xiaofeng<sup>2</sup>,  
Huang Haiguang<sup>2</sup>, Wang Kuaishe<sup>1</sup>

(1. College of Metallurgical and Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

(2. Yunnan Titanium Industry Co., Ltd, Chuxiong 651209, China)

(3. Faculty of Materials Science and Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

**Abstract:** The thermal simulation compression experiment was used to study the thermal deformation behavior of EB furnace smelting TC4 titanium alloy at a strain rate of  $0.01\sim 10\text{ s}^{-1}$  and a deformation temperature of  $800\sim 1100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , the strain rate sensitivity index  $m$  of the alloy under different deformation conditions was calculated, and a dual multivariate nonlinear regression constitutive equation for EB furnace smelting TC4 titanium alloy was established based on the DMNR model. The results show that at the beginning of deformation, work hardening is dominant, and the flow stress increases with the increase of strain. After reaching the peak stress, the softening effect is dominant, the dislocations begin to slip and climb, and the flow stress decreases with the increases of strain. The value of  $m$  is larger at low temperature and small strain rate, and smaller at high temperature and large strain rate. The larger the value of  $m$ , the more uniform the corresponding microstructure. The established nonlinear regression constitutive equation can better predict the flow stress of TC4 titanium alloy smelted by EB furnace. The average absolute relative error between the predicted value and the measured value is 5.83%, and the correlation coefficient is 0.98.

**Key words:** electron beam cold hearth melting; TC4 titanium alloy; strain rate sensitivity index  $m$ ; constitutive equation

---

Corresponding author: Wang Wei, Ph. D., Associate Professor, College of Metallurgical and Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, P. R. China, E-mail: gackmol@163.com