

基于数值模型的金属橡胶干摩擦迟滞特性研究

黄 凯¹, 白鸿柏¹, 路纯红¹, 曹凤利¹, 高洪飞²

(1. 陆军工程大学, 河北 石家庄 050003)

(2. 白城兵器试验中心, 吉林 白城 137000)

摘 要: 以完全基于实际材料、工艺参数的数值模型为基础, 对金属橡胶的干摩擦迟滞特性进行了研究。从成形压力曲线、材料组织结构、尺寸、加载-卸载曲线等 4 个方面对数值模型的可靠性进行了验证。建立了弹性微元模型及其局部坐标, 对接触对数量、滑动接触对比例、接触对形态进行了研究。接触对数量随加载量的增加而增加, 随卸载量的增加而减小, 滑动接触对约占所有接触对数量的 80%。将接触对分为典型接触对和非典型接触对, 其中典型接触对占主要成分。根据接触对的微观特征, 建立了接触对力学模型, 进而建立了金属橡胶迟滞特性曲线的数学模型。数学模型准确性、可靠性较好, 各参数物理意义充分, 能够较好地对材料的干摩擦迟滞特性进行描述, 对材料的设计具有一定指导意义。

关键词: 金属橡胶; 数值模型; 干摩擦; 迟滞特性; 微观机理

中图分类号: TB31; TB34

文献标识码: A

文章编号: 1002-185X(2018)11-3451-09

金属橡胶是一种具有非线性刚度、大阻尼的弹性多孔材料。它具备耐高/低温、耐腐蚀、耐辐射、疲劳寿命长、真空中不挥发等优点, 可以用于减振、缓冲、吸声、过滤等方面, 在武器装备、航空航天、民用机械等领域具有重要的应用价值和广阔的应用前景^[1-5]。

当前, 国内外学者对金属橡胶的迟滞力学特性进行了广泛研究, 取得了丰硕成果。俄罗斯萨马拉国立航空航天大学的学者建立了叠层悬臂梁模型和角锥模型, 用悬臂梁或角锥的组合对金属橡胶的力学性能进行等效^[6]。敖洪瑞假设金属橡胶内部接触点的状态符合泊松分布, 建立了元件迟滞回线的数学模型^[7]。李冬伟利用非线性刚度环节、粘性阻尼环节和双折线滞迟环节的并联描述了金属橡胶元件的力学特性^[8]。李宇燕采用 BP 神经网络对金属橡胶的本构关系进行学习训练, 得到了神经网络预估模型^[9]。李宇燕还建立了一种非线性干摩擦结构, 对金属橡胶元件的力学特性进行等效^[10]。这些模型能够较好地描述金属橡胶元件的宏观力学性能, 但是不能对材料的微观机理进行解释。因此, 国内外学者对金属橡胶的微观力学特性进行了研究。朱彬利用单匝螺旋卷及其组合, 建立了金属橡胶的力学模型^[11,12]。李宇燕以多孔材料理论和曲梁

模型为基础, 建立了材料加载-卸载曲线的数学模型^[13]。李宇明利用受轴向和径向载荷微元弹簧的组合, 对材料的力学特性进行了描述^[14]。曹凤利采用了变长度曲梁模型, 并假设滑动接触点符合泊松分布, 描述了材料成形和非成形方向的力学特性^[15,16]。这些模型中引入了单匝螺旋卷、多孔材料理论模型、微元弹簧、曲梁等微观结构, 较好地描述了材料的迟滞力学特性, 取得了显著成果。然而, 由于金属橡胶内部组织结构十分复杂, 建模过程中难以避免地使用了唯象的方法, 建立的数学模型中包含了物理意义并不十分明确的参数, 难以探究材料受载时内部结构的变化情况和材料干摩擦耗能的微观机理。

本研究以完全基于实际材料、工艺参数的数值模型为基础, 对金属橡胶的迟滞特性进行了研究。研究了材料内部弹性微元间的接触作用和干摩擦滑动, 建立了接触对力学模型和金属橡胶迟滞特性的数学模型, 描述了材料干摩擦特性的微观机理, 数学模型物理意义充分, 准确性较好。

1 数值模型及可靠性验证

所研究的金属橡胶为环形元件, 如图 1a 所示, 外径 20 mm, 内径 12 mm, 金属丝直径 0.2 mm, 材

收稿日期: 2017-11-05

基金项目: 武器装备“十二五”预先研究项目

作者简介: 黄 凯, 男, 1987 年生, 博士生, 陆军工程大学, 河北 石家庄 050003, E-mail: hk420604@163.com

料为 304 不锈钢。数值模型如图 1b 所示，其完全依据实际材料、工艺参数建立，为了便于研究，模型尺寸截取了全构件周向尺寸的 1/6，共包括 31983 个节点，详细建模方法参看文献[17]。

为了对数值模型的可靠性进行验证，主要从成形压力曲线、材料组织结构、尺寸、加载-卸载曲线等 4 个方面与实验进行对比。其中成形压力曲线、材料组织结构、尺寸的验证参见文献[18]。由文献[18]可知，数值模型可以在成形压力曲线、组织结构形态、尺寸等方面与实际元件符合良好。但是作为研究材料干摩擦耗能特性的基础，必须对数值模型的加载-卸载曲线进行验证，以保证研究的可靠性。

本研究分别取 3 组工艺参数对金属橡胶元件进行制备和数值计算，工艺参数如表 1 所示。对 3 组实际元件和数值模型进行准静态加载-卸载，并画出加载-卸载曲线，限于篇幅，只给出元件 1 的曲线，如图 2 所示。可见，数值计算结果和实验曲线吻合良好，数值模型可以较好地描述实际元件的干摩擦耗能特性。

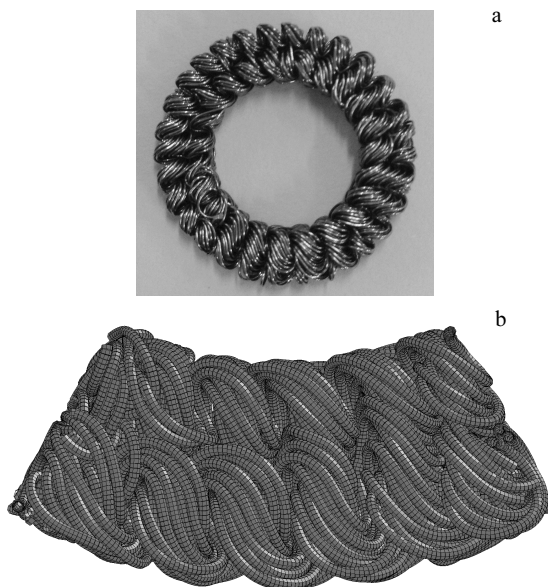


图 1 金属橡胶元件及数值模型

Fig.1 Component and numerical model of metal rubber: (a) real product and (b) numerical model

表 1 工艺参数

Table 1 Different process parameters

Specimen	Compacting force/kN	Thickness of product/mm	Relative density
1	12	3.20	0.333
2	20	2.70	0.395
3	28	2.44	0.438

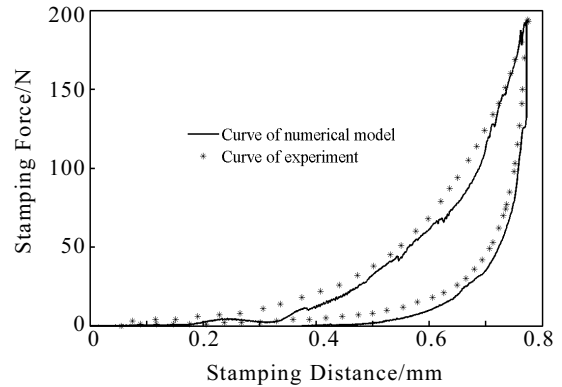


图 2 准静态加载-卸载曲线

Fig.2 Curves of quasi-static loading-unloading

2 金属橡胶材料细观分析

2.1 组织结构分解及局部坐标简介

为了对金属橡胶内部金属丝的相互作用进行分析，需要对金属丝进行截断。根据节点在加载方向的坐标对金属丝截断，生成一系列金属丝微元（下称弹性微元），如图 3 所示，详细截断方法参看文献[18]。

截断后的弹性微元可以近似地视为平面曲梁，以便对每个弹性微元建立局部坐标。利用弹性微元上的节点坐标，拟合 1 个平面，令平面的法向量作为微元局部坐标的 z 轴方向向量。令局部坐标 xoy 平面通过弹性微元的第 1 个节点，将弹性微元节点向局部坐标 xoy 平面投影，利用投影点坐标可以拟合成一段圆弧，令圆弧对应的圆心为局部坐标的原点。各局部坐标详细建立方法参看文献[18]。本研究中，全局坐标用 $OXYZ$ 表示，局部坐标用 $oxyz$ 表示，准静态加载方向为全局坐标 Z 轴负方向，准静态卸载方向为全局坐标 Z 轴正方向。

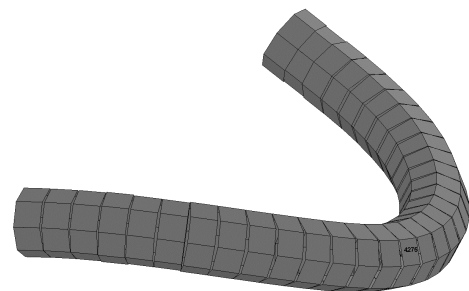


图 3 弹性微元示意图

Fig.3 Elastic micro structure

2.2 接触对数量及滑动接触对比例

本研究以弹性微元及其相互作用为基础，对金属橡胶材料的干摩擦力学特性进行研究。随着载荷的变化，弹性微元会发生相互接触，其中每一对两两接触的弹性微元构成 1 个接触对。若 1 个接触对中，2 个弹性微元相互滑动，形成滑动摩擦副，则称为滑动接触对。

材料内部金属丝之间的干摩擦耗能是金属橡胶的主要能量耗散方式，在接触对中，只有滑动摩擦副才能起到耗能作用，因此滑动接触对对材料力学特性的影响至关重要。通过数值模型，可以较容易地得到金属丝节点各个时刻的空间坐标，从而对弹性微元间的接触情况进行判断，进而对接触对数量和滑动接触对所占比例进行估算。图 4 为弹性微元接触对数量随加载-卸载过程的变化。可见，接触对数量随加载量的增加而增加，随卸载量的增加而减小。图 5 为滑动接触对数量与接触对数量之比随加载-卸载过程的变化。可见，在加载-卸载过程中，滑动接触对比例在 0.8 上下波动，其中，加载时，滑动接触对比例均值为 0.79，卸载时，滑动接触对比例均值为 0.80，为简化问题，取滑动接触对比例为 0.8，即滑动接触对占有所有接触对数量的 80%。

2.3 接触对形态及其力学模型

建立弹性微元后，可以根据数值模型中各节点坐标，对接触对中 2 个微元的相对位置关系进行观察和定性研究。对数值模型内的接触对进行大量观测，每 1 个接触对的空间方位、接触位置等细观特征都不完全相同，但是有一类接触对较为广泛地存在，如图 6 所示，本研究称为典型接触对。典型接触对具有如下特征：一是 2 个微元所在平面（局部坐标 xoy 平面）的夹角较小，二是接触位置在每个弹性微元所在平面的两侧。这类接触对之所以较为

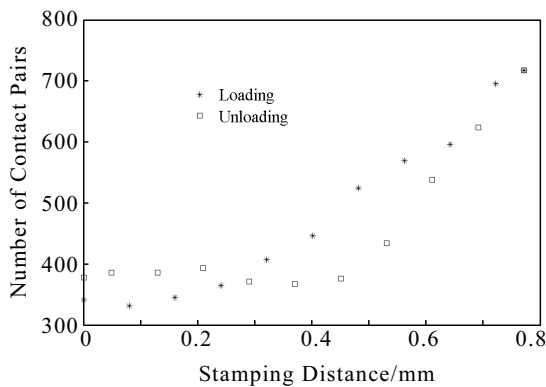


图 4 接触对数量在加载-卸载过程中的变化

Fig.4 Variation of contact pairs' quantity in loading-unloading process

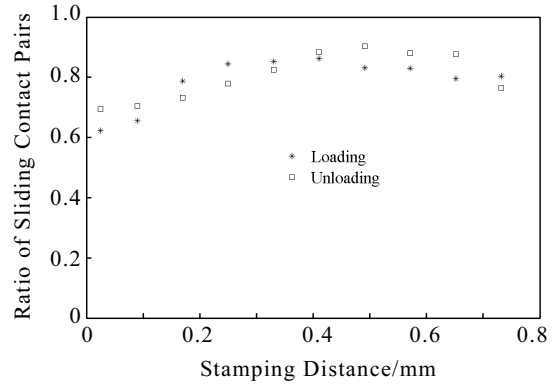


图 5 滑动接触对比例在加载-卸载过程中的变化

Fig.5 Ratio of sliding contact pairs in loading-unloading process

普遍，是因为金属橡胶由螺旋卷制备毛坯并冲压成形，这一过程使螺旋卷相互嵌入，嵌入后，弹性微元与邻近微元的接触位置较多地发生于其所在平面的两侧，且冲压过程使相互嵌入的弹性微元相互挤压，使其所在平面的夹角变小。

为了进一步对上述结论进行验证，对加载后每对接触对所在平面的夹角进行了计算。若 1 个接触对中，2 个弹性微元各局部坐标 z 向方向向量分别为 a 、 b ，则夹角 θ' 为：

$$\theta' = \arccos\left(\frac{ab}{|a| \times |b|}\right) \tag{1}$$

θ 为两弹性微元所在平面夹角，可由下式计算：

$$\begin{cases} \theta = \theta' & (0 \leq \theta' \leq \pi/2) \\ \theta = \pi - \theta' & (\pi/2 < \theta' \leq \pi) \end{cases} \tag{2}$$

通过数值模型，可求得加载后所有接触对对应的平面夹角 θ ， θ 的均值为 28.21° ，可见，从整体上看，各接触对的两弹性微元平面夹角较小，这间接证明了典型接触对存在的广泛性。

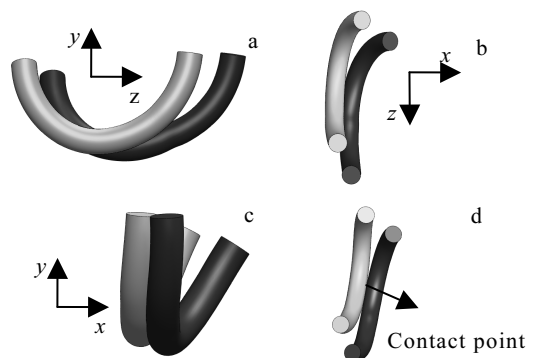


图 6 典型接触对

Fig.6 Typical contact pair: (a) left view, (b) top view, (c) front view, and (d) position of contact point

金属橡胶材料内部金属丝结构形态十分复杂，除了上述典型接触对，还存在其他的接触形态，如图 7 所示，这些接触对不同满足典型接触对的 2 个特征，要么弹性微元所在平面的夹角很大，要么接触位置更贴近弹性微元所在圆弧的内外两侧。

为了简化问题，同时又能对材料内部的主要接触特征进行数学描述，以典型接触对为基础，建立如下接触对力学模型，如图 8 所示。图 8 所示力学模型中，弹性微元用半圆环表示，弹性微元直径等于螺旋卷直径，接触位置位于弹性微元所在平面两侧。根据文献[18]可知，在本研究金属丝截断方法和局部坐标建立方法的基础上，弹性微元在局部坐标 xoy 平面内的平移主要体现在 y 方向，因此在模型中假设弹性微元的相对滑动方向与局部坐标 y 轴平行。

3 数学模型

3.1 接触对力学模型 z 向等效刚度

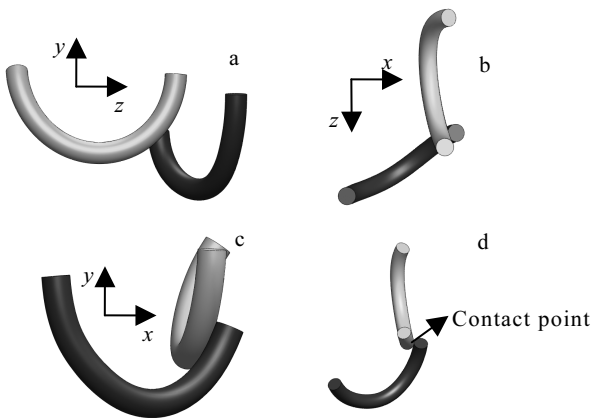


图 7 非典型接触对

Fig.7 Non-typical contact pair: (a) left view, (b) top view, (c) front view, and (d) position of contact point

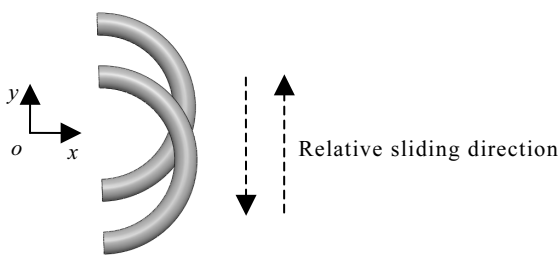


图 8 接触对力学模型

Fig.8 Mechanical model of contact pair

由文献[18]可知，每个弹性微元在其局部坐标 z 向可以用 h 个并联曲梁进行表示，每个弹性微元的 z 向刚度为：

$$k'_z = \frac{\pi^2 E d^4}{8 D^3 F(h)} \quad (3)$$

式中， E 为金属丝弹性模量， d 为金属丝直径， D 为弹性微元直径， $F(h)$ 为：

$$F(h) = (2 + \frac{3}{2}\gamma)\pi^2 \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4}\gamma\pi \frac{1}{h} \sin(\frac{2\pi}{h}) - (2 + 2\gamma)\pi \frac{1}{h} \sin(\frac{\pi}{h}) \quad (4)$$

式中， γ 为泊松比。

在接触对力学模型中，2 个弹性微元在 z 向串联，模型 z 向等效刚度为：

$$k_z = \frac{k'_z}{2} = \frac{\pi^2 E d^4}{16 D^3 F(h)} \quad (5)$$

3.2 接触对力学模型 y 向等效刚度

将接触对力学模型看做一个整体，在加载或卸载时， y 向的弹性变形和干摩擦作用同时发生，弹性恢复力与弹性微元的 y 向变形成正比，摩擦副摩擦力的大小与接触正压力成正比。因此，将滑动接触对 y 向力学特性用如下模型进行描述，如图 9 所示。

在图 9 的力学模型中，每个弹性微元的 y 向压缩刚度用 k'_y 表示，由文献[18]可知：

$$k'_y = \frac{E d^4}{4 D^3} \quad (6)$$

滑动摩擦副的滑动摩擦力 F_f 可以用滑动摩擦模型进行计算，如图 10 所示。滑动摩擦力 F_f 的大小与接触正压力成正比，接触正压力为：

$$F_N = k_f \cdot \Delta z \quad (7)$$

式中， k_f 为两弹性微元 z 向因接触产生的刚度， Δz 为两弹性微元在接触位置的 z 向相对位移。

在实际材料中，每个弹性微元与周边金属丝发生多处接触，这些接触使弹性微元在 z 向可以视为 h 个小曲梁并联^[18]。本研究利用如图 11 所示的模型，对刚度 k_f 进行计算。

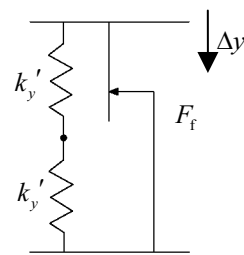


图 9 滑动接触对 y 向力学模型

Fig.9 Mechanical model in y direction of sliding contact pair

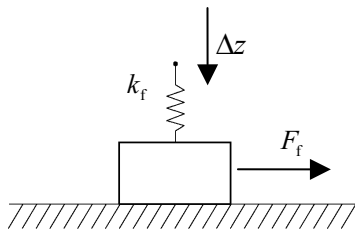


图 10 滑动摩擦模型
Fig.10 Sliding friction model

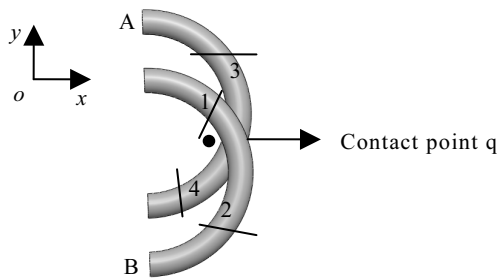


图 11 k_f 计算模型
Fig.11 Calculation model of k_f

图 11 模型中，弹性微元 A 与弹性微元 B 在 q 点发生接触，每个弹性微元可以视为由 h 个小曲梁并联，其中，弹性微元 A 在 q 点附近的小曲梁为曲梁 3 和曲梁 4，弹性微元 B 在 q 点附近的小曲梁为曲梁 1 和曲梁 2。每个小曲梁的刚度为^[18]：

$$k_q = \frac{\pi^2 E d^4}{8 D^3 h F(h)} \quad (8)$$

曲梁 1 和曲梁 2 并联，刚度为：

$$k_{12} = 2k_q \quad (9)$$

曲梁 3 和曲梁 4 并联，刚度为：

$$k_{34} = 2k_q \quad (10)$$

k_{12} 与 k_{34} 串联，刚度为：

$$k_f = k_q = \frac{\pi^2 E d^4}{8 D^3 h F(h)} \quad (11)$$

则加载时，接触对模型的 y 向力为：

$$F_y = F_k + F_f = \frac{1}{2} k_y' \Delta y + \mu k_f \Delta z \quad (12)$$

式中， μ 为摩擦系数。

本研究建立弹性微元局部坐标的方法，可以使

局部坐标的 x 轴与全局坐标的 XOY 平面平行，即元件加载方向与局部坐标 yoZ 平面平行。加载方向、局部坐标 z 向、局部坐标 y 向三者的关系如图 12 所示。若局部坐标 z 轴与全局坐标 Z 轴夹角为 ϕ ，则

$$\begin{cases} \Delta z = \Delta S \cos \phi \\ \Delta y = \Delta S \sin \phi \end{cases} \quad (13)$$

式中， ΔS 为接触对模型在加载方向的变形， Δz 、 Δy 分别为 ΔS 在局部坐标 z 向、 y 向的分量。

由式 (12)、式 (13) 可得：

$$F_y = \frac{1}{2} k_y' \Delta y + \mu k_f \Delta y \cdot \cot \phi \quad (14)$$

则加载时 y 向等效刚度为：

$$k_y = \frac{F_y}{\Delta y} = \frac{1}{2} k_y' + \mu k_f \cot \phi \quad (15)$$

同理，卸载时 y 向等效刚度为：

$$k_y = \frac{1}{2} k_y' - \mu k_f \cot \phi \quad (16)$$

非滑动接触对的 y 向刚度为 2 个 k_y' 串联，即

$$k_y = \frac{1}{2} k_y' \quad (17)$$

3.3 接触对在加载方向的等效刚度

由图 12 可知，接触对在加载方向的刚度贡献为：

$$k = k_z \cos \phi + k_y \sin \phi \quad (18)$$

由式 (5)、(15)、(18) 可得加载时滑动接触对在加载方向的等效刚度为：

$$\begin{aligned} k_L &= k_z \cos \phi + k_y \sin \phi \\ &= \frac{\pi^2 E d^4}{8 D^3 F(h)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{h} \right) \cos \phi + \frac{E d^4}{8 D^3} \sin \phi \end{aligned} \quad (19)$$

由式 (5)、(16)、(18) 可得卸载时滑动接触对在加载方向的等效刚度为：

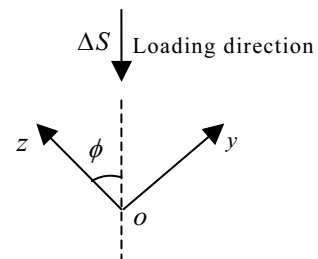


图 12 局部坐标 yoZ 平面
Fig.12 Plane yoZ of local coordinates

$$\begin{aligned}
 k_U &= k_z \cos \phi + k_y \sin \phi \\
 &= \frac{\pi^2 E d^4}{8 D^3 F(h)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{h} \right) \cos \phi + \frac{E d^4}{8 D^3} \sin \phi
 \end{aligned} \quad (20)$$

由式 (5)、(17)、(18) 可得非滑动接触对在加载方向的等效刚度为:

$$\begin{aligned}
 k_2 &= k_z \cos \phi + k_y \sin \phi \\
 &= \frac{\pi^2 E d^4}{16 D^3 F(h)} \cos \phi + \frac{E d^4}{8 D^3} \sin \phi
 \end{aligned} \quad (21)$$

3.4 金属橡胶非线性弹性模量模型

若金属橡胶单位体积内包含的接触对数量为 N , 包含弹性微元数量为 N_{EMS} , 则所有接触对中, 每个弹性微元平均被重复了 $2N/N_{EMS}$ 次, 平均每个微元有 $2N/N_{EMS}$ 个接触点, 又每个弹性微元可以被视为 h 个小曲梁并联, 可设

$$\frac{2N}{N_{EMS}} = C_N h \quad (22)$$

式中, C_N 为待定系数, $N_{EMS}^{[18]}$ 为:

$$N_{EMS} = \frac{8\bar{\rho}}{\pi^2 d^2 D} \quad (23)$$

式中, $\bar{\rho}$ 为相对密度, $\bar{\rho} = \rho_{MR} / \rho$, ρ_{MR} 为金属橡胶的密度, ρ 为金属丝材料的密度, D 为螺旋卷直径。

由式 (22)、(23) 可得:

$$N = \frac{4C_N \bar{\rho} h}{\pi^2 d^2 D} \quad (24)$$

假设在实际材料内部, 接触对均匀分布, 接触对线密度为:

$$\rho_l = N^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4C_N \bar{\rho} h}{\pi^2 d^2 D} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (25)$$

在本研究的数值模型算例中, 加载过程中最小接触对数量为 331, 卸载过程中最小接触对数量为 367, 数值模型中共有 572 个弹性微元。即每个弹性微元在加载、卸载时分别被重复了 $2 \times 331 / 572 = 1.16$ 次和 $2 \times 367 / 572 = 1.28$ 次, 因此可以假设每个弹性微元都参与了接触对的构成, 也就是假设材料内部只有滑动接触对和非滑动接触对 2 种基本单元, 没有单独的、不参与接触对构成的弹性微元。

金属橡胶材料内部组织结构十分复杂, 对接触对间的串并联关系难以完全准确获取。本研究采用如下分层串并联模型对接触对间的串并联关系进行近似描述。取一单位立方体微元, 假定在垂直于加载方向的单位面积上有 m 个接触对并联, 其中滑动接触对 ηm 个, 非滑动接触对 $(1-\eta)m$ 个, 在加载方向上的单位长度上有 n 层接触对串联, 如图 13 所示。

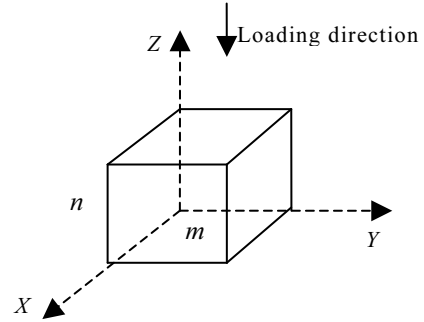


图 13 接触对串并联模型

Fig.13 Series-parallel model of contact pairs

图 13 模型中, 加载时, 每层的刚度为:

$$k_c = \eta m k_L + (1-\eta) m k_2 \quad (26)$$

因为层与层串联, 可得单元体在加载方向的刚度为:

$$k = \frac{k_c}{n} = \frac{\eta m k_L + (1-\eta) m k_2}{n} \quad (27)$$

金属橡胶材料在加载方向的应力-应变关系为

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E = k = \frac{\eta m k_L + (1-\eta) m k_2}{n} \quad (28)$$

设 $m = C_1 \rho_l^2$, $n = C_2 \rho_l$, 则式 (28) 可写为:

$$E_L = C_L \rho_l [\eta k_L + (1-\eta) k_2] \quad (29)$$

式中, C_L 为待定系数。

同理, 卸载时, 金属橡胶的弹性模量为:

$$E_U = C_U \rho_l [\eta k_U + (1-\eta) k_2] \quad (30)$$

式中, C_U 为待定系数。

将式 (19)、(21)、(25) 代入式 (29), 同时, 根据本研究 2.2 节的结论, η 取 0.8, 式 (29) 变为:

$$\begin{aligned}
 E_L &= 2^{\frac{7}{3}} \pi^{\frac{2}{3}} C_L C_N^{\frac{1}{3}} \bar{\rho}^{\frac{1}{3}} E d^{\frac{10}{3}} D^{-\frac{10}{3}} \\
 &\quad \left[\frac{\pi^2 (5h + 8\mu)}{10h^{\frac{2}{3}} F(h)} \cos \phi + h^{\frac{1}{3}} \sin \phi \right]
 \end{aligned} \quad (31)$$

将式 (20)、(21)、(25) 代入式 (30), η 取 0.8, 式 (30) 变为:

$$\begin{aligned}
 E_U &= 2^{\frac{7}{3}} \pi^{\frac{2}{3}} C_U C_N^{\frac{1}{3}} \bar{\rho}^{\frac{1}{3}} E d^{\frac{10}{3}} D^{-\frac{10}{3}} \\
 &\quad \left[\frac{\pi^2 (5h - 8\mu)}{10h^{\frac{2}{3}} F(h)} \cos \phi + h^{\frac{1}{3}} \sin \phi \right]
 \end{aligned} \quad (32)$$

3.5 求待定系数 C_N 、 C_L 、 C_U

加载刚开始时, 弹性微元不受外力作用, z 向没有发生多段曲梁并联的情况, 此时, $h=1$, 对应的 $F(h)$ 为:

$$F_1 = (2 + \frac{3}{2}\gamma)\pi^2 \quad (33)$$

加载刚开始时, 单位体积内包含的接触对数量为 N_0 , N_0 可由数值模型得到, 此时由式 (24) 可得:

$$C_N = \frac{\pi^2 d^2 D N_0}{4\bar{\rho}} \quad (34)$$

将各参数代入式 (31), 可得:

$$C_L = \frac{40(4+3\gamma)D^3 E_{L0}}{N_0^{\frac{1}{3}} E d^4 [(5+8\mu)\cos\phi + (20+15\gamma)\sin\phi]} \quad (35)$$

式中, γ 为泊松比, E_{L0} 为加载初始时刻金属橡胶的弹性模量, E 为金属丝材料的弹性模量, μ 为摩擦系数, d 为金属丝直径。实际工况中, E_{L0} 取“载荷-位移”加载实验数据的第 1 个数据点对应的材料弹性模量。

同理, 将各参数代入式 (32), 可得:

$$C_U = \frac{40(4+3\gamma)D^3 E_{U0}}{N_0^{\frac{1}{3}} E d^4 [(5-8\mu)\cos\phi + (20+15\gamma)\sin\phi]} \quad (36)$$

式中, E_{U0} 为卸载刚结束时金属橡胶的弹性模量, 实际工况中, E_{U0} 取“载荷-位移”卸载实验数据的最后 1 个数据点对应的材料弹性模量。

3.6 确定 h 与 ε 的关系

若实验元件加载方向的厚度为 L_{MR} , 加载量为 D_{MR} , 则对应的应变为

$$\varepsilon_{MR} = \frac{D_{MR}}{L_{MR}} \quad (37)$$

由“载荷-位移”实验数据可以计算得到元件的刚度 K_{MR} , 若元件垂直于加载方向的截面面积为 A_{MR} , 则实验数据对应的弹性模量为:

$$E_{MR} = \frac{K_{MR} L_{MR}}{A_{MR}} \quad (38)$$

根据实验数据和式 (37), 可得加载时数据点对应的应变 ε_{Li} 和卸载时数据点对应的应变 ε_{Ui} 。根据实验数据和式 (38), 可得每一个加载数据点对应的弹性模量 E_{Li} 和每一个卸载数据点对应的弹性模量 E_{Ui} 。根据离散数据 E_{Li} 、式 (4)、(31)、(34)、(35), 利用 MATLAB 软件, 求得加载时 h 的数值解 h_{Li} 。同理, 根据离散数据 E_{Ui} 、式 (4)、(32)、(34)、(36), 由 MATLAB 软件求得卸载时 h 的数值解 h_{Ui} 。

$$E_L = 2^{-\frac{7}{3}} \pi^{-\frac{2}{3}} C_L C_N^{\frac{1}{3}} \bar{\rho}^{\frac{1}{3}} E d^{\frac{10}{3}} D^{-\frac{10}{3}} \left[\frac{\pi^2 (5h_L + 8\mu)}{10h_L^{\frac{2}{3}} \left[(2 + \frac{3}{2}\gamma)\pi^2 \frac{1}{h_L^2} + \frac{1}{4}\gamma\pi \frac{1}{h_L} \sin(\frac{2\pi}{h_L}) - (2 + 2\gamma)\pi \frac{1}{h_L} \sin(\frac{\pi}{h_L}) \right]} \cos\phi + h_L^{\frac{1}{3}} \sin\phi \right] \quad (39)$$

式中, $h_L = a_1 \varepsilon + a_2$ 。

利用离散数据 ε_{Li} 和 h_{Li} 作图, 如图 14 中虚线所示, 可见, h_L 与 ε_L 近似成线性关系, 拟合曲线 $h_L = a_1 \varepsilon_L + a_2$, 如图 14 中实线所示。

利用离散数据 ε_{Ui} 与 h_{Ui} 做图, 如图 15 中虚线所示, 可见, h_U 与 ε_U 非线性程度较强, 本研究用 5 次多项式 $h_U = b_1 \varepsilon_U^5 + b_2 \varepsilon_U^4 + b_3 \varepsilon_U^3 + b_4 \varepsilon_U^2 + b_5 \varepsilon_U + b_6$ 进行拟合, 拟合曲线如图 15 中实线所示。

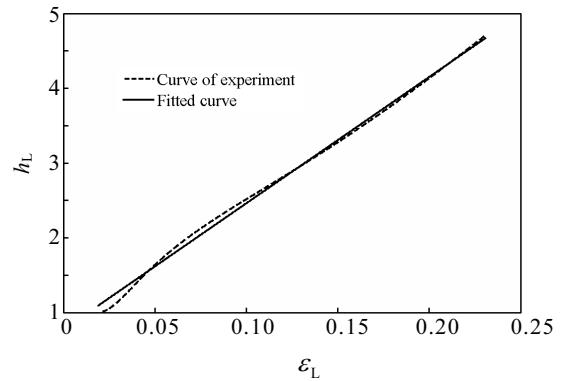


图 14 h_L 与 ε_L 的函数关系

Fig.14 Function relationship of h_L and ε_L

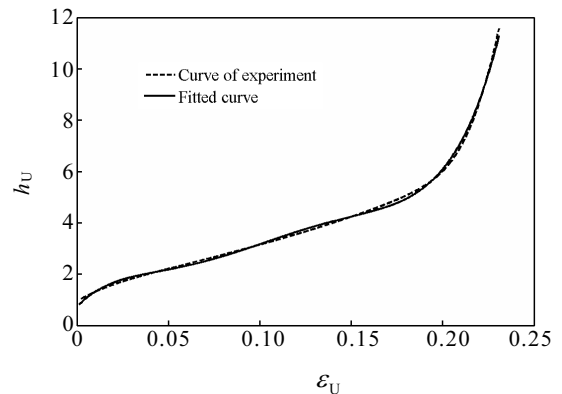


图 15 h_U 与 ε_U 的函数关系

Fig.15 Function relationship of h_U and ε_U

最终, 综合式 (4)、式 (31) 可得, 加载时金属橡胶的非线性弹性模量的数学表达式为:

综合式 (4)、式 (32) 可得卸载时金属橡胶的非线性弹性模量的数学表达式为:

$$E_U = 2^{-\frac{7}{3}} \pi^{-\frac{2}{3}} C_U C_N^{\frac{1}{3}} \bar{\rho}^{\frac{1}{3}} E d^{\frac{10}{3}} D^{-\frac{10}{3}} \left[\frac{\pi^2 (5h_U - 8\mu)}{10h_U^{\frac{2}{3}} \left[(2 + \frac{3}{2}\gamma)\pi^2 \frac{1}{h_U^2} + \frac{1}{4}\gamma\pi \frac{1}{h_U} \sin(\frac{2\pi}{h_U}) - (2 + 2\gamma)\pi \frac{1}{h_U} \sin(\frac{\pi}{h_U}) \right]} \right] \cos \phi + h_U^{\frac{1}{3}} \sin \phi \quad (40)$$

式中, $h_U = b_1 \varepsilon^5 + b_2 \varepsilon^4 + b_3 \varepsilon^3 + b_4 \varepsilon^2 + b_5 \varepsilon + b_6$ 。

式 (39)、式 (40) 中各参数的物理意义分别为: C_L 、 C_U 为修正系数, 分别反映了加载、卸载时, 所用力学模型与实际材料中接触对空间分布的差异; C_N 表示加载初始时刻, 每个弹性微元接触点数量与其 z 向并联曲梁个数的关系; ϕ 取弹性微元局部坐标 z 轴与全局坐标 Z 轴夹角的均值, 反映了弹性微元的空间方位; 加载时, h_L 与 ε 线性相关, $h_L = a_1 \varepsilon + a_2$, 其中 a_2 为刚开始加载时, 弹性微元 z 向并联曲梁的个数, a_2 的理想数值为 1, a_1 反映了弹性微元 z 向并联曲梁个数随应变的变化速率; 卸载时, h_U 与 ε 非线性相关, h_U 可以表示为 $h_U = b_1 \varepsilon^5 + b_2 \varepsilon^4 + b_3 \varepsilon^3 + b_4 \varepsilon^2 + b_5 \varepsilon + b_6$, 其中 b_6 表示卸载刚结束时弹性微元 z 向并联曲梁的个数, b_6 的理想数值为 1, 参数 $b_1 \sim b_5$ 分别反映了弹性微元 z 向并联曲梁个数与 ε 相应阶次的相关程度。

4 实验验证

式 (39)、(40) 分别为金属橡胶加载、卸载时的非线性弹性模量的解析表达式, 为了对表达式的准确性进行验证, 将其进行数值积分, 分别得到加载、卸载时金属橡胶材料的应力-应变曲线, 并与实验结果进行对比。本研究分别取 3 组不同的元件进行对比 (元件的工艺参数见表 1), 限于篇幅, 只给出元件 1 的对比结果, 如图 16 所示。由图可见, 本研究的金属橡胶干摩擦迟滞模型与实验结果吻合良好, 说明该数学模型的准确性、可靠性较好, 能够较好地对金属橡胶材料的干摩擦迟滞特性进行预测。

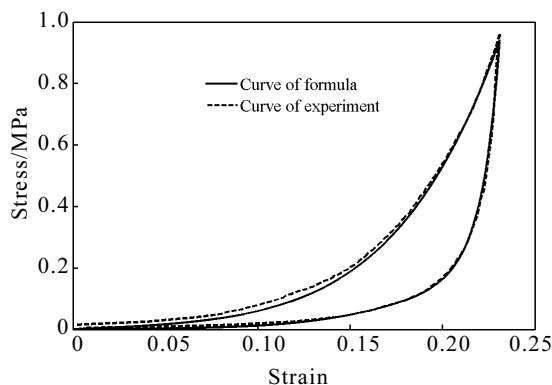


图 16 理论模型与实验结果对比 (试件 1)

Fig.16 Comparison of theoretical model and experimental

result (specimen No.1)

5 结 论

1) 所建立数值模型的材料、工艺参数与实际完全相同, 且在成形压力曲线、材料组织结构、尺寸、加载-卸载曲线等 4 个方面与实验吻合良好, 其作为材料干摩擦迟滞特性的研究基础是可靠的。

2) 金属橡胶材料内部, 接触对数量随加载量的增加而增加, 随卸载量的增加而减小, 在所有的接触对中, 滑动接触对约占 80%。

3) 按接触形态将接触对分为典型接触对和非典型接触对 2 类, 其中典型接触对为主要成分, 此结论通过接触对中弹性微元平面夹角的均值得到了进一步验证。

4) 以典型接触对为基础, 建立了接触对力学模型, 进而建立了金属橡胶干摩擦迟滞特性的数学模型。数学模型包含了材料参数 (E 、 d 、 D 、 $\bar{\rho}$ 、 μ 、 γ)、细观特征参数 (ϕ) 和非线性刚度特性参数 ($a_i, i=1\sim 2; b_j, j=1\sim 6$), 各参数物理意义充分。该数学模型准确性、可靠性较好, 对材料的设计具有一定的指导意义。

参考文献 Reference

[1] Zhang Dayi, Fabrizio Scarpa, Ma Yanhong *et al. Materials and Design*[J], 2014, 56(4): 69

[2] Wu Guoqi(武国启), Yan Hui(闫 辉), Xia Yuhong(夏宇宏) *et al. Rare Metal Materials and Engineering*(稀有金属材料与工程)[J], 2010, 39(11): 1923

[3] Jiang Hongyuan(姜洪源), Guo Yadong(国亚东), Chen Zhaobo(陈照波) *et al. Rare Metal Materials and Engineering*(稀有金属材料与工程)[J], 2009, 38(12): 2116

[4] Yan Hui(闫 辉), Jiang Hongyuan(姜洪源), Zhao Hongyu(赵宏宇) *et al. Rare Metal Materials and Engineering*(稀有金属材料与工程)[J], 2011, 40(12): 2092

[5] Setekleiv E A, Svendsen H F. *Chemical Engineering Science*[J], 2012, 68(1): 624

[6] Чегодаевд Е, Мулюкино П, Колтыгине В. *Design of Metal Rubber Products*(金属橡胶构件的设计)[M].

- Beijing: Academic Press, 2000: 99
- [7] Ao Hongrui(敖宏瑞), Jiang Hongyuan(姜洪源), Xia Yuhong(夏宇宏) *et al.* *Journal of China University of Mining & Technology*(中国矿业大学学报)[J], 2004, 33(4): 453
- [8] Li Dongwei(李冬伟), Bai Hongbai(白鸿柏), Yang Jianchun(杨建春) *et al.* *Chinese Journal of Mechanical Engineering*(机械工程学报)[J], 2005, 41(10): 205
- [9] Li Yuyan(李宇燕), Huang Xieqing(黄协清), Li Fulin(李福林). *Journal of Aerospace Power*(航空动力学报)[J], 2011, 26(5): 1128
- [10] Li Yuyan(李宇燕), Huang Xieqing(黄协清), Song Kai(宋凯). *Journal of Vibration and Shock*(振动与冲击)[J], 2011, 30(7): 77
- [11] Zhu Bin(朱彬), Ma Yanhong(马艳红), Hong Jie(洪杰). *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*(北京航空航天大学学报)[J], 2011, 37(10): 1298
- [12] Zhun Bin(朱彬), Ma Yanhong(马艳红), Zhang Dayi(张大义) *et al.* *Acta Physica Sinica*(物理学报)[J], 2012, 61(7): 8101
- [13] Li Yuyan(李宇燕), Huang Xieqing(黄协清). *Acta Armamentarii*(兵工学报)[J], 2008, 29(7): 819
- [14] Li Yuming(李宇明), Peng Wei(彭威), Bai Hongbai(白鸿柏) *et al.* *Chinese Journal of Mechanical Engineering*(机械工程学报)[J], 2005, 141(9): 38
- [15] Cao Fengli(曹凤利), Bai Hongbai(白鸿柏), Ren Guoquan(任国全) *et al.* *Chinese Journal of Mechanical Engineering*(机械工程学报)[J], 2012, 48(24): 61
- [16] Cao Fengli(曹凤利), Bai Hongbai(白鸿柏), Li Dongwei(李冬伟) *et al.* *Chinese Journal of Mechanical Engineering*(机械工程学报)[J], 2015, 51(2): 84
- [17] Huang Kai(黄凯), Bai Hongbai(白鸿柏), Lu Chunhong(路纯红) *et al.* *Rare Metal Materials and Engineering*(稀有金属材料与工程)[J], 2016, 45(3): 681
- [18] Huang Kai(黄凯), Bai Hongbai(白鸿柏), Lu Chunhong(路纯红) *et al.* *Rare Metal Materials and Engineering*(稀有金属材料与工程)[J], 2018, 47(10): 3021

Analysis of Dry Friction Hysteresis Characteristics of Metal Rubber with Numerical Model

Huang Kai¹, Bai Hongbai¹, Lu Chunhong¹, Cao Fengli¹, Gao Hongfei²

(1. Engineering University of the Army, Shijiazhuang 050003, China)

(2. Baicheng Weaponry Test Centre, Baicheng 137000, China)

Abstract: Based on a numerical model established absolutely with actual material and process parameters, dry friction hysteresis characteristics of metal rubber were studied. The numerical model was verified from the four respects: forming force, material structure, size and loading-unloading curve. The elastic micro element model and its local coordinates were established. The number of contact pairs, sliding contact pairs ratio and status of contact pairs were studied. Results show that contact pairs increase in number with the increasing loading and decreases with the increasing unloading, which accounts for nearly 80% of all contact pairs. The contact pairs were divided in two kinds: typical contact pairs and untypical pairs, and the typical contact pairs were the main components. According to the meso-characteristics of contact pairs, a contact pair mechanical model and a mathematic model of metal rubber hysteresis were established. It is found that the mathematic model is accurate and reliable, and its parameters have clear physical meaning. The hysteresis of metal rubber can be described well with the mathematic model and metal rubber products can be designed with the formulas.

Key words: metal rubber; numerical model; dry friction; hysteresis characteristics; meso-mechanism

Corresponding author: Huang Kai, Candidate for Ph. D., Engineering University of the Army, Shijiazhuang 050003, P. R. China, E-mail: hk420604@163.com