

# 基于流函数法的铝合金板材异步轧制 应变计算数学模型

江连运, 卫焱宇, 薛志伟, 马琦琦, 李恒, 马立峰

(太原科技大学 机械工程学院, 山西 太原 030024)

**摘要:** 作为一种剧烈塑性变形技术, 异步轧制是提高铝合金板材变形均匀性的重要方式。但由于异步轧制中存在多变量、强耦合、非线性等特点, 其厚度方向变形机制难以精准解析。为深入研究异步轧制厚度方向变形情况, 建立了一种板材异步轧制沿厚度方向应变计算模型。根据轧制过程的运动学特点, 变形区被分为刚性-塑性-刚性区。在此基础上对变形区边界条件进行了修正, 并采用流函数法建立近真实的运动学容许速度场。根据最小能原理和线性化积分手段建立了轧制功率消耗模型, 解决了计算过程中的多参量非线性耦合问题, 实现了变形区边界模型快速计算。结合速度分量与应变速率分量, 最终建立了异步轧制轧后应变计算模型。为了验证理论模型的准确性进行了数值模拟与异步轧制试验。与试验结果进行对比, 计算结果最大误差为 13.44%, 最小误差为 1.33%, 整体计算耗时缩减到 1 s 以下。模型的建立可为异步轧制板材质量调控与预测提供重要理论参考。

**关键词:** 异步轧制; 流函数; 边界条件; 轧制应变

**中图分类号:** TG339

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1002-185X(2023)03-0911-10

随着制造业的深入发展, 铝合金在航空航天、兵器、舰船等国防产业及高铁、汽车制造等民用产业得到了广泛的应用。为了使铝合金板材中心区域变形充分, 提出了异步轧制这一非对称轧制工艺。与对称轧制相比, 异步轧制通过改变辊速、辊径或表面粗糙度<sup>[1]</sup>, 在搓轧区中提供一个贯穿厚度方向的剪切变形, 该剪切变形可以有效产生全厚度上均匀的塑性应变并细化板材内部微观组织(提高变形均匀性)<sup>[2]</sup>。但由于轧制过程是一个“黑箱”过程, 板材应变信息无法在线实时监测, 且生产流程中存在多变量、强耦合、非线性和大滞后等特点。因此, 如何建立一种异步轧制应变快速预测与判断的机制模型, 实现多工艺参量强耦合作用下最优工艺选择, 成为当前进一步提高板材质量的“卡脖子”问题。

目前, 有限元法是研究轧制成形问题中应用最广泛的一种方法, 作为一种数值计算方法有限元法可以准确计算出成形问题中的应力、应变结果。中南大学李学文<sup>[3]</sup>采用数值模拟的方法对 AA7050 异步轧制以及蛇形轧制进行了分析。Ji 等<sup>[4]</sup>通过数值模拟研究了同步轧制和异步轧制(同速异径)轧后中性点的位置, 并计算了搓轧区的长度, 获得了异步轧制中压缩变形

与剪切变形规律。此外, Ji<sup>[5]</sup>还针对同径异速、非对称摩擦等异步轧制方式进行了数值模拟研究, 获得了变形过程中各方向应变分量实时变化历程。上述研究结果具有较高准确性与稳定性, 为研究异步轧制应变提供了一种间接准确的方法。

实验法作为直接方法在研究轧制变形中也有广泛应用。目前, 对异步轧制过程中变形的直接观察方式包括: 轧板内部嵌入金属块和在轧板侧面刻蚀的方式。Cui<sup>[6]</sup>等采用在纯铝板中嵌入铝线的方式观察了异步轧制纯铝板时的变形情况, 研究发现上、下工作辊异速比引起的剪切变形贯穿了整个变形区厚度, 提高了板材变形的均匀性。丁毅<sup>[7]</sup>采用在纯铁试样中嵌入铜块的方式对异步轧制剪切变形行为进行了直接观测, 并利用实验结果计算了剪切变形。左方青等<sup>[8]</sup>采用在铝板侧面刻线的方式研究了异步轧制和同步轧制过程中的形变情况, 获得了压下量与剪切应变的关系, 并计算了累计剪切应变。

由于塑性成形过程(特别是轧制、挤压等工艺)涉及大量几何非线性与材料非线性<sup>[9]</sup>, 这些问题对深入研究机理造成了许多困难。因此, 大量专家学者针对如何建立塑性成形机制模型进行了研究。目前常用

收稿日期: 2022-03-27

基金项目: 国家自然科学基金(52175354)

作者简介: 江连运, 男, 1985 年生, 博士, 副教授, 太原科技大学机械工程学院, 山西 太原 030024, 电话: 0351-2776763, E-mail: jiangly2015@126.com

的解析模型方法分为 2 种，一种是通过求解静力平衡方程获得力能参数模型的主应力法<sup>[10]</sup>；另一种是在运动学分析的基础上按照最小能原理求解成形过程力能参数的能量法，包括：流函数法<sup>[11]</sup>、屈服准则线性化解法<sup>[12]</sup>、变分法<sup>[13]</sup>等。其中，Liu 等<sup>[14]</sup>利用流函数法成功计算板材轧制宽展计算中为研究板材厚度方向应变指明了方向。

流函数法在锻造和挤压领域的成功应用使许多研究人员研究了它在轧制过程中的应用。Hwang 等<sup>[15]</sup>采用流函数法分析了复合板的轧制过程。此后，Hwang<sup>[16]</sup>利用双流函数法和圆柱坐标建立了计算中厚板轧制速度场的数学模型。研究了板材在辊缝中的塑性变形行为。Sezek 等<sup>[17]</sup>修改了入口和出口边界条件，并计算了轧制力和轧制力矩。Doğruoğlu<sup>[18]</sup>建立了运动学容许速度场模型，并提供了模型的上限解。双远华等<sup>[19]</sup>利用流函数法求解了斜轧（TSR）无缝钢管过程中的速度模型与应变速率模型，模型精度良好。综上所述，流函数法在轧制过程的理论分析中发挥着重要作用，推动了轧制技术的进步。

作为一种成熟可靠的方法，本研究基于流函数法和上限法进行了运动学参数建模。建立了一个近真实的、灵活的、便于计算的运动学容许速度场。根据变形特点，修正和优化了变形区边界条件，减小了均匀变形假设引起的模型误差。根据最小能原理和线性化积分计算方法建立了总功耗计算模型，解决了计算过程中的多场多参量非线性耦合问题，实现了变形区边界模型的快速计算。开展了不同压下量和异速比时的轧制过程数值模拟和实验验证，检验了模型的准确性。得到的应变计算模型将为轧制生产提供可靠的理论和技术支持。

## 1 应变计算模型

为建立异步轧制的轧后应变计算模型，进行了以下假设：

(1) 由于轧件具有较大宽厚比，且在试验过程中轧后宽展量极小，因此，将三维轧制模型简化为二维平面应变模型。

(2) 轧制后板材的弹性变形量和弹性回复量与总变形量相比很小，被认为是理想的刚塑性材料；工作辊变形量远小于轧件工作辊设置为刚体。

(3) 根据轧件运动学特征，板材分为入口刚性区、塑性变形区与出口刚性区。

(4) 假设轧辊与轧件之间无黏着现象，接触处摩擦服从库伦摩擦定律。

### 1.1 变形区速度特性

同径异速轧制过程中，变形区内部金属流动状态

受上、下工作辊线速度差影响而发生改变。为深入研究变形区中金属运动特性，采用 Ansys/Ls-dyna 对板材异步冷轧过程开展数值模拟分析。模拟中，工作辊半径  $R$  为 225 mm；上、下工作辊异速比为 1.2（由于异速比较大，为避免轧后板材弯曲与辊道发生碰撞，下工作辊被设定为快速辊上工作辊被设定为慢速辊，上工作辊速度恒定为 7 m/min）；压下率 20%；材料模型为 AA1060 铝合金板材（厚度 10 mm，长度 1000 mm）；接触区域上下表面摩擦系数设定为 0.25。

图 1 表示沿厚度方向单元在轧制过程中的速度模拟结果。0.22 s 之前板材整体做匀速运动（未咬入辊缝）；之后板材做减速运动。当时间到达 0.52 s 时，单元咬入辊缝，速度开始上升并呈现出沿快速辊向慢速辊一侧梯度分布现象。对区域 II 内速度进行分析后发现：在初始咬入阶段，与慢速辊接触一侧单元速度低于快速辊，但当轧制过程即将结束时，峰值速度又表现出同步性；当时间到达 1.24 s 时所有单元统一做刚性运动。综上所述，根据各单元运动结果将变形区分为刚性运动区 I、塑性变形区 II、刚性运动区 III。

图 2 为轧制板材变形区内部的等效应变和等效应变速率云图。异步轧制应变与应变速率在变形区中呈现非对称分布特性，同步/异步轧制变形云图在变形区入口均呈现出抛物线形，出口处遵循横断面假设。结合图 1 中 0.52 s 前后沿厚度方向单元速度分布规律，假设咬入处板材与上、下工作辊接触区域内部单元的速度关于  $x$  轴对称，基于秒流量相等原则，变形区入口（即刚性运动区 I 与塑性变形区 II 分界线）被修正为抛物线型（关于  $x$  轴对称）。

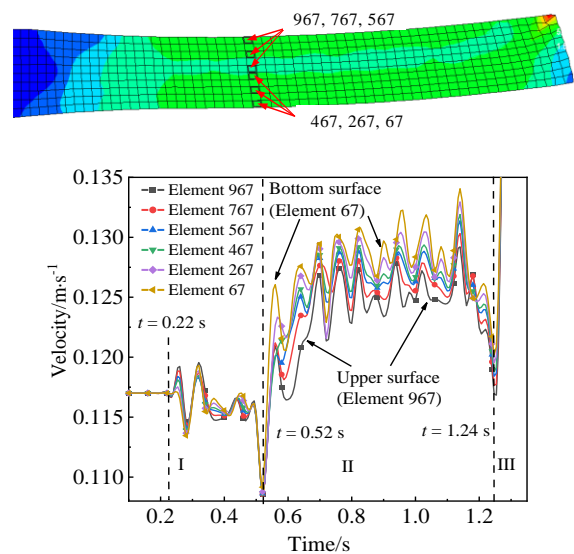


图 1 沿厚度方向单元速度分布模拟结果

Fig.1 FEM results of velocity distribution along thickness

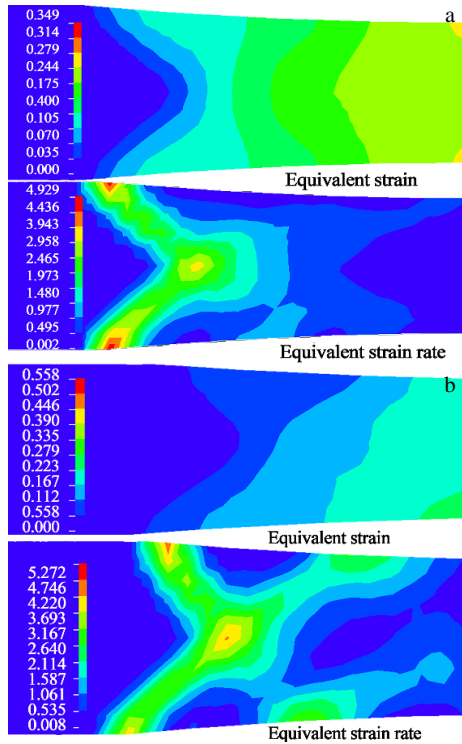


图 2 轧制变形区内金属变形分布云图

Fig.2 Cloud diagrams of metal deformation distribution in rolling deformation zone: (a) symmetrical rolling and (b) asymmetrical rolling

### 1.2 变形区分

图 3 为异步轧制变形区二维示意图。图中， $\Gamma$  为入口处刚塑性分界线，其上任意点处切线与水平方向夹角为  $\alpha$ 。沿轧制方向变形区依次为入口刚性区 I—塑性区 II—出口刚性区 III。在 I 区和 III 区中材料分别以速度  $v_0$  和  $v_1$  做平行于对称轴的刚性运动，在 II 区沿流线材料服从运动许可速度场。 $R$  为工作辊半径， $v$  为工作辊速度， $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  分别为中性点  $x_{n_1}$  (快速辊侧) 和中性点  $x_{n_2}$  (慢速辊侧) 中性角， $H$  和  $h$  分别表示轧制入口和出口厚度， $\Delta h$  为压下量。

#### 1.2.1 几何边界与运动边界

上下轧辊与轧件接触弧按抛物线处理，其几何方程分别为：

$$\begin{cases} y_1(x) = R + h + \frac{x^2}{2R} \\ y_2(x) = R - \frac{x^2}{2R} \end{cases} \quad (1)$$

式中， $x$  表示接触弧上任意点水平坐标。

速度间断线  $\Gamma$  作为变形区分判据，与被加工金属内部运动状态相关，其几何形貌难以假设获得。为了求解速度间断线  $\Gamma$  表达式，根据变形区真实运动学

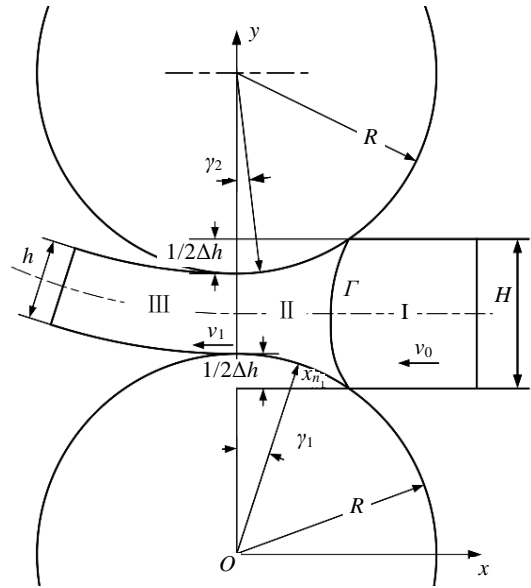


图 3 同径异速轧制示意图

Fig.3 Schematic diagram of the asymmetrical rolling with same diameter

特点、不可压缩特性以及体积不变定律建立下式：

$$\phi_I = \phi_{II} = \phi_{III} \quad (2)$$

式中， $\phi_I$ 、 $\phi_{II}$  和  $\phi_{III}$  分别表示图 2 中入口刚性区、塑性区以及出口刚性区中单位横截面上任意位置处金属流量方程。

$\phi_I$ 、 $\phi_{II}$  和  $\phi_{III}$  具体表达式如下：

$$\begin{cases} \phi_I = \varphi \frac{y - y_2(x)}{H} \\ \phi_{II} = \varphi \frac{y - y_2(x)}{y_1(x) - y_2(x)} + \varphi(ax^2 + b)(y - R - h/2)[y - y_2(x)][y - y_1(x)] \\ \phi_{III} = \varphi \frac{y - y_2(x)}{h} \end{cases} \quad (3)$$

式中， $\varphi = v_0 H = v_1 h$  表示秒流量； $\varphi(ax^2 + b)[y - y_1(x)][y - y_2(x)]$  表示附加流函数场， $(ax^2 + b)$  表示附加流函数场形状修正函数， $[y - y_1(x)][y - y_2(x)]$  表示接触面边界控制函数。考虑到轧制过程中中性层偏移仅发生在搓轧区中，在接触面边界控制函数的基础上增加  $(y - R - h/2)$  作为中性层控制函数。

联立式(2)和式(3)得到速度间断线  $\Gamma$  几何关系方程：

$$\frac{y - R + x^2/2R}{h + x^2/R} + (ax^2 + b) \left( y - R - \frac{h}{2} \right) \left( y - R + \frac{x^2}{2R} \right) \left( y - R - h - \frac{x^2}{2R} \right) = \frac{y - R + x^2/2R}{H} \quad (4)$$

考虑到速度间断线靠近工作辊入口，此时有：

$$\lim_{x \rightarrow l} (x^2/2R) = \Delta h, \quad l = \sqrt{2R\Delta h}, \quad (5)$$

进一步地联立式(4)和式(5)得到速度间断线  $\Gamma$  表达式:

$$y_3(x) = \frac{(R+h/2+H)}{2} + \frac{\sqrt{(R+h/2+H)^2 - 4\left(RH + Hh/2 + \frac{1/H-1/h}{ax^2+b}\right)}}{2} \quad (6)$$

由于轧制变形区中板材初始厚度  $H$ , 变形区长度  $l$ , 压下率  $\varepsilon$  为独立变量, 因此当给定上述参数时有:

$$h = (1-\varepsilon)H, \quad \Delta h = \varepsilon H, \quad R = l^2/2\varepsilon H \quad (7)$$

此时采用无量纲坐标,  $\bar{x} = x/l, \bar{y} = [y - y_2(x)]/H$  有:

$$y_1(\bar{x}) = 1 + 1/\varepsilon + \varepsilon\bar{x}^2/2 - \varepsilon, \quad y_2(\bar{x}) = 1/\varepsilon - \varepsilon\bar{x}^2/2,$$

$$\phi_1 = \varphi\bar{y}, \quad \phi_{II} = \varphi\bar{y}/(1-\varepsilon)$$

$$v_x = \frac{\partial\phi_{II}}{\partial\bar{y}} = \frac{\varphi}{1-\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2} + \varphi(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2)(\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2) + \varphi(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2)(\bar{y}-1-\varepsilon-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2) + \varphi(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2)(\bar{y}-1-\varepsilon-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2) \quad (10)$$

$$v_y = \frac{-\partial\phi_{II}}{\partial\bar{x}} = -\varphi \frac{-2\varepsilon\bar{x}(\bar{y}-1/\varepsilon)}{(1-\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2)^2} + \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2)(\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2) - \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2)(\bar{y}-\varepsilon-1-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2) - 2\varphi a\bar{x}(\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2)(\bar{y}-1-\varepsilon-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2)(\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2) \quad (11)$$

应变速率场模型:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial\bar{x}} = \varphi \frac{-2\varepsilon\bar{x}}{(1-\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2)^2} + \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)[\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2] + 2\varphi a\bar{x}(\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2)(\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2) + 2\varphi a\bar{x}(\bar{y}-1-\varepsilon-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2)(\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2) + \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1-\varepsilon-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2) - \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2) - \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2) + 2\varphi a\bar{x}[\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2](\bar{y}-1-\varepsilon-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2) \quad (12)$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial\bar{y}} = \varphi \frac{2\varepsilon\bar{x}}{(1-\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2)^2} - \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)[\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2] - 2\varphi a\bar{x}[\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2](\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2) - 2\varphi a\bar{x}(\bar{y}-1-\varepsilon-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2)(\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2) - \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1-\varepsilon-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2) + \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2/2) + \varphi\varepsilon\bar{x}(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2) - 2\varphi a\bar{x}[\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2](\bar{y}-1-\varepsilon-1/\varepsilon-\varepsilon\bar{x}^2/2) \quad (13)$$

上式中应变速率分量之和为零, 该流函数模型满足无源场中速度散度为零的特性。

### 1.2.3 功率消耗建模与参数寻优

为了解决速度模型与应变速率模型表达式中存在可变未知参量  $a$  和  $b$  的问题, 需要按照最小能原理对可变参量  $a$  和  $b$  进行寻优, 整体功率表达式如式(14)所示:

$$\phi_{II} = \varphi \frac{\bar{y}-1/\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon\bar{x}^2} + \varphi(a\bar{x}^2+b)(\bar{y}-1/\varepsilon+(\varepsilon-1)/2) [\bar{y}-y_1(\bar{x})][\bar{y}-y_2(\bar{x})] \quad (8)$$

联立式(6)与式(8), 得到速度间断线  $\Gamma$  无量纲化表达式, 如式(9)所示:

$$y_3(\bar{x}) = 0.75(1+\varepsilon) + 0.5\sqrt{2.25(1+\varepsilon)^2 - (1+\varepsilon)^2 \left[ \frac{1/(1-\varepsilon)-1/(1+\varepsilon)}{a\bar{x}^2+b} \right]} \quad (9)$$

### 1.2.2 运动许可速度场与应变速率场

流函数法属于能量法的范畴, 在该解法中变形体被视为不可压缩物体, 塑性变形问题被认为是一种无源场, 速度矢量的散度为零。在每个单独的变形区域内, 速度场与其导数(应变速率场)是连续的。根据流函数性质, 对塑性变形区 II 中的流线  $\phi_{II}$  进行偏导求解得到速度场模型:

$$W_{all} = W_v + W_{f_1} + W_{f_2} + W_{f_3} \quad (14)$$

式中,  $W_{all}$  为模型整体消耗功率,  $W_v$  为塑性变形功率,  $W_{f_1}$  为接触弧摩擦功率,  $W_{f_3}$  为剪切功率。

根据成形能量线性化积分准则, 轧制过程中塑性变形消耗功率如式(15)所示:

$$W_V = 2\sqrt{3}/3\sigma_s Hl \left[ \int_{y_2(\bar{x})}^{y_1(\bar{x})} \int_0^1 (\dot{\epsilon}_{\max} - \dot{\epsilon}_{\min}) d\bar{x}d\bar{y} - \int_0^1 \int_{x_3(\bar{y})} (\dot{\epsilon}_{\max} - \dot{\epsilon}_{\min}) d\bar{x}d\bar{y} \right] \quad (15)$$

式中， $x_3(y)$ 为运动边界， $y_3(x)$ 反函数。

剪切功率如式(16)所示：

$$W_T = kH \int_0^1 \sqrt{(v_x - v_0)^2 + v_y^2} d\Gamma \quad (16)$$

式中， $k$ 为等效剪切屈服应力， $k = \sigma_s/\sqrt{3}$ ， $\sigma_s$ 为屈服应力。 $d\Gamma$ 表示刚塑性分界线  $\Gamma$  上的单位长度，如式(17)所示：

$$d\Gamma = \sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} \quad (17)$$

联立式(16)和式(17)获得剪切功率的表达式：

$$W_T = kH \int_0^1 \sqrt{(v_x - v_0)^2 + v_y^2} \cdot \sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} \quad (18)$$

进一步地，刚塑性分界线  $\Gamma$  两侧速度矢量存在下列关系：

$$\vec{v}_0 \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} \quad (19)$$

根据图 3 中几何关系可知：

$$v_y/(v_x - v_0) = \tan \alpha = dy/dx \quad (20)$$

最终，剪切功率表达式为：

$$W_T = kH \int_0^1 \left[ (v_x - v_0)^2 + v_y^2 \right]^{1/2} v_y d\bar{y} \quad (21)$$

摩擦功率表达式如式(22)所示：

$$W_{f_1} = mk \int_{y_1(x)} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dy_1(\bar{x}) \quad (22)$$

$$W_{f_2} = mk \int_{y_2(x)} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dy_2(\bar{x})$$

其中  $dy_1(\bar{x}) = dy_2(\bar{x}) = \sqrt{(d\bar{x})^2 + (\Delta h/2 d\bar{y})^2}$  化简后有：

$$dy_1(\bar{x}) = dy_2(\bar{x}) = l \sqrt{1 + (\Delta h/2l)^2} (d\bar{y}/d\bar{x}) d\bar{x}$$

进一步：

$$dy_1(\bar{x}) = l \sqrt{1 + (\Delta h/2l)^2} dy_1^2(\bar{x}) = l \sqrt{1 + (\epsilon^2 \bar{x} H/4l)^2} d\bar{x} \quad (23)$$

结合式(22)和式(23)获得上下轧辊表面摩擦功率表达式：

$$W_{f_1} = mkl \int_0^{\gamma_1} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \sqrt{1 + (\epsilon^2 \bar{x} H/4l)^2} d\bar{x} - \int_{\gamma_1}^0 \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \sqrt{1 + (\epsilon^2 \bar{x} H/4l)^2} d\bar{x}$$

$$W_{f_2} = mkl \int_0^{\gamma_2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \sqrt{1 + (\epsilon^2 \bar{x} H/4l)^2} d\bar{x} - \int_{\gamma_2}^0 \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \sqrt{1 + (\epsilon^2 \bar{x} H/4l)^2} d\bar{x} \quad (24)$$

式中， $m$ 为摩擦系数， $\gamma_2$ 和 $\gamma_1$ 分别为上下接触面中性角。

将式(15)、(21)、(24)相加得到整体功率模型，按照最小能原理将总功率模型代入 Matlab 寻优工具箱对可变参量  $a$  和  $b$  进行寻优。得到  $a$ 、 $b$  数值后带入式(10)~式(13)中得到各方向速度分量与应变速率分量精确值。

### 1.2.4 轧后等效应变建模

在平面应变模型中等效应变计算模型如下：

$$\epsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}} A, \quad A = 2\sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_{xy}^2} \quad (25)$$

式中， $A$ 表示广义剪应变， $\epsilon_e$ 表示等效应变。

结合式(8)所求的应变速率模型，广义剪应变  $A$  计算结果如式(26)所示：

$$A = \int_0^t 2\sqrt{\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_{xy}^2} dt \quad (26)$$

式中， $t$ 表示轧制变形区消耗时间，将变形区长度  $l$  除以同一高度上的水平速度平均值(沿轧制方向每隔 1 mm 为一水平速度采样点)即可求得。

## 2 轧制实验

为验证理论模型准确性，采用 AA1060 铝板开展轧制实验，具体力学性能参数见表 1。表 1 中切线模量为双线性等向强化 (BISO) 模型参数，表示屈服极限与屈服强度之间斜率。

采用直径 450 mm 的二辊轧机 (工作辊调速范围介于 0.8~1.2)，调整异速比与压下量进行冷轧试验。试验前板材表面进行抛光处理，并在轧制入口方向打出坡口，轧辊表面清除粘连金属并涂抹石墨，以降低试样与工作辊间摩擦力的影响。采用在板材侧向激光刻线的方式测量轧后应变，具体参数如图 4 所示。试验方式为单次轧制，上工作辊速度设置为 7 m/min，

表 1 AA1060 铝合金板材力学性能

Table 1 Mechanical properties of AA1060 plate

Yield strength, $\sigma_s$ /MPa	Elastic modulus, $E$ /GPa	Poisson ratio, $\mu$	Density, $\rho$ /kg m <sup>-3</sup>	Tangent modulus/MPa
39	0.62	0.33	2700	1.05

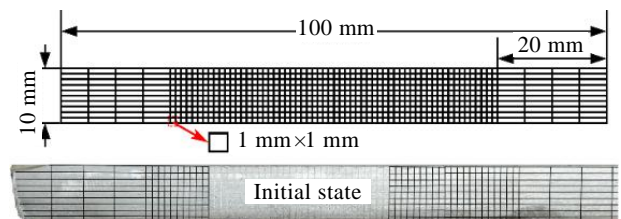


图 4 轧前板材网格尺寸

Fig.4 Plate grid size before rolling

压下率分别设置为 20%、30%、40% 和 50%；异速比分别设置为 1、1.05、1.1 和 1.2。依托于 ANSYS/Ls-dyna 有限元软件模拟轧制过程，模拟参数与试验参数相同。

速辊一侧(1/4 板厚)。

图 6 为不同异速比下轧后单元变形情况。由图 6 可知，当压下率为 20%，异速比从 1.05 提高至 1.1 时，

### 3 结果与分析

#### 3.1 实验结果

图 5 为异步轧制试验后板材心部位置网格变形情况。图 6 分别表示不同异速比和不同压下率下，距离慢速辊接触面 1/4、1/2、3/4 位置处的试验结果，其中网格尺寸越小表示变形程度越大。对比结果发现：压下率一定时，提高异速比可以有效地提高板材变形程度；但提高异速比会导致板材内部金属流动情况发生改变，上下表面流动速度差引起的剪切应变最终导致了板材弯曲问题。这一现象在试验中的直观表现为：靠近快速辊一侧(3/4 板厚)单元变形程度大于靠近慢

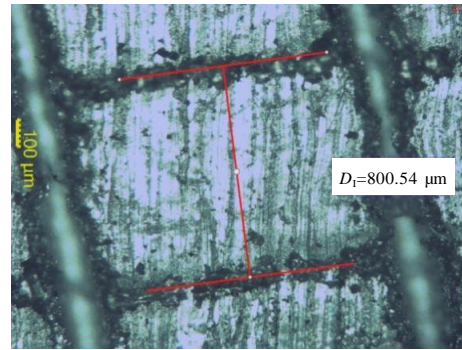


图 5 轧后板材网格尺寸

Fig.5 Plate grid size after rolling

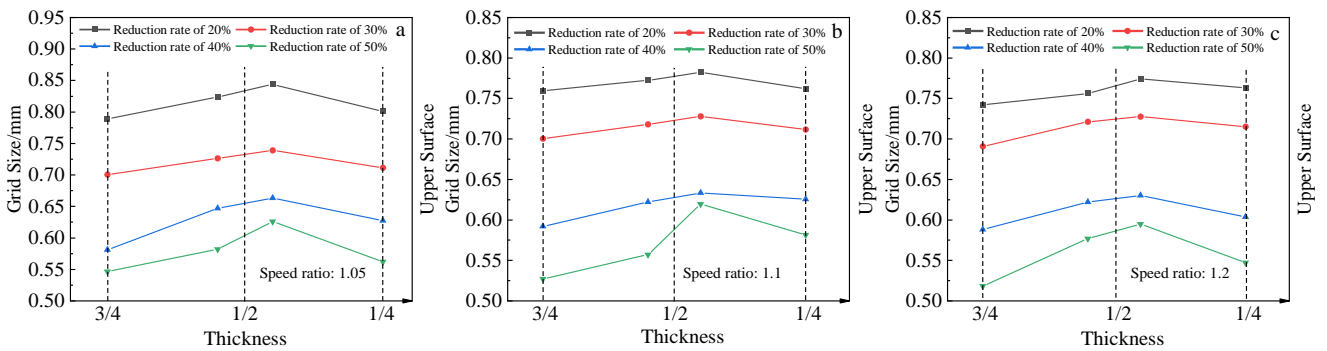


图 6 不同异速比下轧后单元变形情况

Fig.6 Grid size after rolling with different speed ratios: (a) 1.05, (b) 1.1, and (c) 1.2

心部两侧单元厚度分别从 843.78 和 823.84 μm 降低至 782.23 和 772.33 μm，其等效应变分别提高了 44.56% 和 33.28%；当异速比从 1.05 提高至 1.2 时，心部两侧单元厚度分别从 843.78 和 823.84 μm 降低至 774.04 和 756.01 μm，其等效应变分别提高了 50.74% 和 44.32%。但当压下率为 50% 异速比从 1.05 分别提升至 1.1 和 1.2 时，心部等效应变仅提升 4.31% 和 15.53%。造成这一现象的主要原因是塑性变形功率与板材几何参数间存在强相关关系式 (15)，且板材塑性变形功率在轧制总功率中占比远大于剪切功率与摩擦功率。因此，在当前接触条件下，当压下率大于 50% 时，提高异速比对提高板材变形均匀性能力有限，但异速比可对轧后板材心部剪切应变的提升产生积极效果并促进板材变形向心部渗透。

图 7 为异速比为 1.05 时不同压下率下厚度方向等效应变理论模型、实验结果和模拟结果。表 2 为心部单元等效应变理论模型、实验结果和模拟结果。

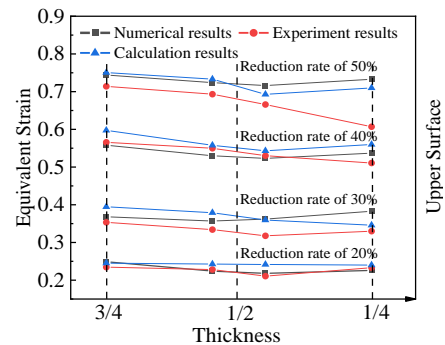


图 7 异速比 1.05 不同压下率下等效应变计算结果

Fig.7 Calculation results of equivalent strain under different reduction rates and speed ratio of 1.05

#### 3.2 模型精度分析

##### 3.2.1 不同压下量

实验与模拟结果吻合良好，最大相对误差为 6.85%，最小相对误差为-1.84%。与实验结果相比理论模型最大相对误差为 13.44%（30%压下率）；理论模型最小相对误差为 1.44%（40%压下率）。与有限元模拟结果相比，理论计算最大相对误差为 8.35%（20%压下率），最小相对误差为 1.26%（50%压下率）。

### 3.2.2 不同异速比

图 8a、图 8b 和图 8c 分别表示异速比为 1.05、1.1 和 1.2 时不同压下量下心部单元等效应变理论模型、实验结果和模拟结果。图 8a 中理论计算结果与实验结果最大相对误差为 13.44%（30%压下率），最小相对误差为 1.44%（40%压下率）；图 8b 中理论计算结果与实验结果最大相对误差为 10.19%（30%压下率），最小相对误差为 1.54%（50%压下率）；图 8c 中理论计算结果与实验结果最大相对误差为-5.92%（40%压下率），最小相对误差为 1.33%（30%压下率）。

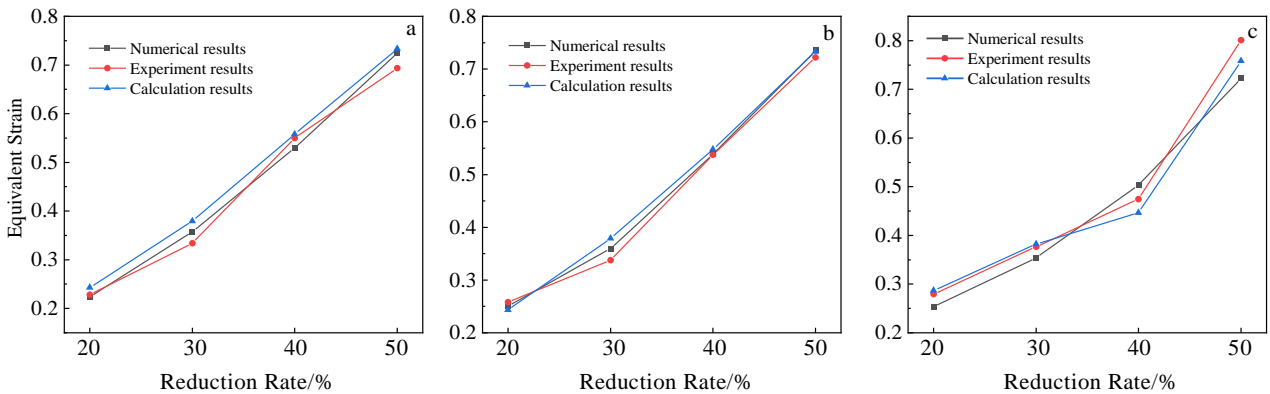


图 8 不同异速比下等效应变计算结果

Fig.8 Calculation results of equivalent strain with different speed ratios: (a) 1.05, (b) 1.1, and (c) 1.2

3.81%（20%压下率）；异速比为 1.1 时，理论计算结果与数值模拟结果最大相对误差为 11.90%（30%压下率），最小相对误差为 5.36%（40%压下率）；异速比为 1.2 时，理论计算结果与数值模拟结果最大相对误差为 11.67%（30%压下率），最小相对误差为 8.82%（50%压下率）。

经统计，本研究所建立的同径异速轧制应变模型能够较为准确地预测异步轧制后的等效应变值和心部单元剪切应变值，模型最大误差小于等于 11.90%，模型精度较为良好。该模型可以作为制定合理轧制工艺及最优在线控制方案的原理依据。

与有限元模拟相比，本研究提出的轧后等效应变理论计算模型可有效地降低计算变形区等效应变所需时间。以当下标准台式计算机为例(CPU 型号 I7-9700,

### 3.2.3 心部单元剪切应变

图 9 和表 3 为不同压下率和不同异速比下心部单元剪切应变理论模型计算结果与数值模拟计算结果。异速比为 1.05 时，理论计算结果与数值模拟结果最大相对误差为 10.00%（50%压下率），最小相对误差为

表 2 心部等效应变理论计算结果与实验结果

Table 2 Calculation results and experimental results of equivalent strain at the center

Reduction rate/%	20	30	40	50
Experiment results	0.2282	0.3341	0.5499	0.6933
Calculation results	0.2427	0.379	0.5578	0.7331
Numerical results	0.224	0.357	0.53	0.724
Relative error (C-E)/%	6.35	13.44	1.44	5.74
Relative error (N-E)/%	-1.84	6.85	-3.62	4.43
Relative error (C-N)/%	8.35	6.16	5.25	1.26

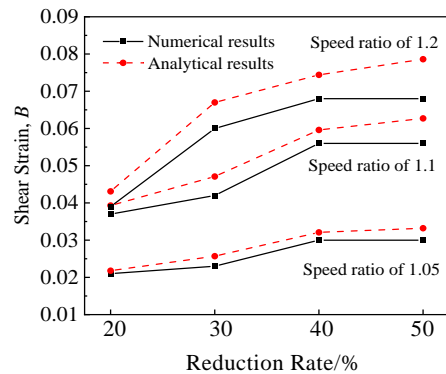


图 9 不同压下率与异速比下心部单元剪切应变计算结果

Fig.9 Calculation results of shear strain at center under different reduction rates and different speed ratios

表 3 不同压下率下心部单元剪切应变

Table 3 Shear strain of central element with different reduction rates

Item	Reduction rate/%	Speed ratio		
		1.05	1.1	1.2
Numerical	20	0.021	0.037	0.039
Analytical		0.022	0.039	0.043
Relative error/%		3.81	6.22	10.51
Numerical	30	0.024	0.042	0.060
Analytical		0.026	0.047	0.067
Relative error/%		8.33	11.90	11.67
Numerical	40	0.030	0.056	0.068
Analytical		0.032	0.059	0.074
Relative error/%		6.67	5.36	8.82
Numerical	50	0.030	0.056	0.072
Analytical		0.033	0.062	0.078
Relative error/%		10.00	10.71	9.72

主频 3.0 GHz, 16 G 内存), 所需的典型二维有限元模拟在 CPU 满载情况下计算时间大于等于 0.5 h; 而在相同配置下, 文中理论模型计算时间小于等于 1 s。因此, 采用该理论计算模型可大幅降低计算时间, 有利于轧制工业中应变参数的快速计算。

### 3.3 轧后应变影响规律研究

采用理论模型针对不同异速比和压下率时的异步轧制过程展开研究, 获得了轧后心部单元的等效应变和剪切应变, 分别如图 10、图 11 所示。计算模型中工作辊半径  $R$  为 225 mm, 材料参数与表 1 相同。

在图 10 中, 当初始板厚( $H$ )为 10 mm 时, 提高异速比后心部单元轧后等效应变最大可提升 16.1%; 当初始板厚为 20 和 30 mm 时, 心部单元轧后等效应变最大提升为 9.4% 和 3.8%。在图 11 中, 压下率 50% 初始板厚 10 mm 时, 心部单元剪切应变最大提升 3.7 倍; 压下率 50% 初始板厚为 20 和 30 mm 时, 心部单元剪切应变最大提升 2.9 倍和 1.7 倍, 证实了异步轧制搓轧

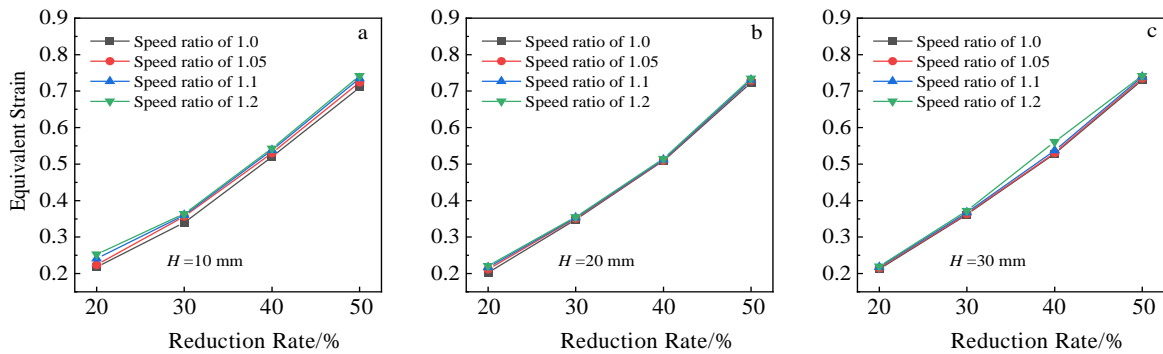


图 10 不同异速比和压下率下心部单元轧后等效应变

Fig.10 Equivalent strain of central element under different speed ratios and different reduction rates: (a)  $H=10$  mm, (b)  $H=20$  mm, and (c)  $H=30$  mm

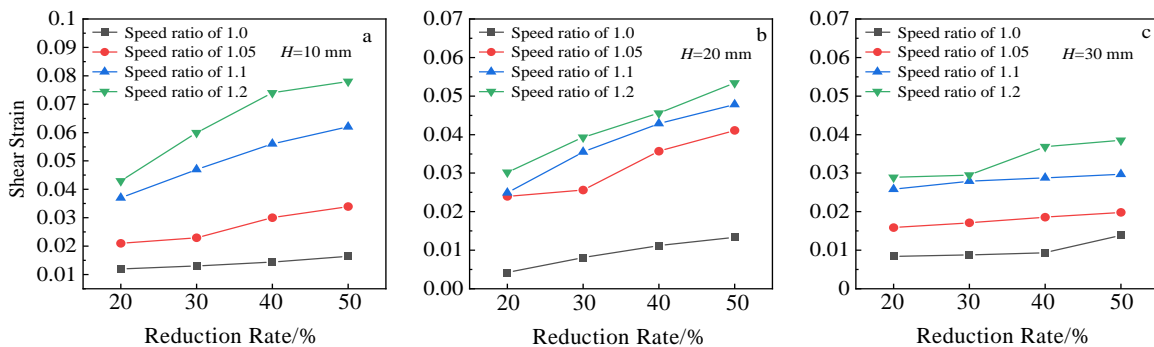


图 11 不同异速比和压下率下心部单元轧后剪切应变

Fig.11 Shear strain of central element under different speed ratios and different reduction rates: (a)  $H=10$  mm, (b)  $H=20$  mm, and (c)  $H=30$  mm



区的强剪切提高板材心部剪切应变的积极效果。但随着板厚的增加, 异速比在提高心部应变能力方面逐渐受到限制。在当前接触条件下, 当板厚超过 30 mm 时采用提高异速比的方式已难以显著提高心部应变。

## 4 结 论

1) 根据各变形区的特点, 计算并优化了变形区边界条件, 使边界条件更接近实际情况。采用了将前滑区和后滑区统一在塑性区 II 中的运动学划分方法, 为应变建模提供了重要参考, 避免了复杂的应力分析。采用流函数法建立近真实的运动学容许速度场, 并利用高斯积分模型解决了多场、多变量耦合下的非线性模型求解困难问题, 大大缩短了计算时间。

2) 异速比可对轧后板材心部剪切应变的提升产生积极效果。但受制于厚度和压下率的多重影响, 异速比在提高心部应变能力方面有所限制; 在当前接触条件下当板材厚度超过 30 mm, 仅增大异速比已难以提高板材心部应变。

3) 通过同径异速轧制实验和数值模拟, 验证了应变模型的精度。理论计算模型与实验的最小相对误差和最大相对误差分别为 1.33% 和 13.44%。因此, 本研究建立的应变计算模型可靠、准确, 可用于在线应变预测。

## 参考文献 References

- [1] Ma C Q, Hou L G, Zhang J S *et al.* *Materials Science and Engineering A*[J], 2018, 733: 307
- [2] Kim W J, Yoo S J, Jeong H T. *Scripta Materialia*[J], 2011, 64(1): 49
- [3] Li Xuewen(李学文). *Finite Element Simulation of Asymmetric Rolling Deformation of AA7050 Aluminum Alloy with Asynchronous and Horizontal Dislocation*(AA7050 铝合金异步及水平错位非对称轧制变形的有限元模拟)[D]. Changsha: Central South University, 2013
- [4] Ji Y H, Park J J, Kim W J. *Materials Science and Engineering A*[J], 2007, 454 : 570
- [5] Ji Y H, Park J J. *Materials Science and Engineering A*[J], 2008, 485(1): 299
- [6] Cui Q, Ohori K. *Materials Science and Technology*[J], 2000, 16(10): 1095
- [7] Ding Yi(丁毅). *Study on Microstructure and Properties of Ultrafine Crystal Pure Iron Prepared by Asynchronous Rolling*(异步轧制制备超细晶纯铁及其组织和性能研究)[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2010
- [8] Zuo Fangqing(左方青), Jiang Jianhua(蒋建华), Shan Aidang(单爱党) *et al.* *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*(中国有色金属学报)[J], 2008, 18(4): 774
- [9] Jiang Xingrui(姜兴睿), Zhang Shunhu(章顺虎), Wang Chunju(王春举) *et al.* *Journal of Harbin Institute of Technology*(哈尔滨工业大学学报)[J], 2020, 52(5): 41
- [10] Jiang L Y, Zhen T, Yuan G *et al.* *Metallurgical Research and Technology*[J], 2020, 117(3): 301
- [11] Wang Tao(王涛), Qi Yanyang(齐艳阳), Liu Jianglin(刘江林) *et al.* *Journal of Harbin Institute of Technology*(哈尔滨工业大学学报)[J], 2020, 52(6): 15
- [12] Zhang S H, Song B N, Gao S W *et al.* *Applied Mathematical Modelling*[J], 2018, 55 : 674
- [13] Zhao D W, Zhang S H, Li C M *et al.* *Journal of Iron and Steel Research, International*[J], 2012, 19(3): 20
- [14] Liu Y M, Zhang D H, Zhao D W *et al.* *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*[J], 2016, 82(5-8): 1153
- [15] Hwang Y M, Hsu H H, Lee H J. *International Journal of Mechanical Sciences*[J], 1995, 39(3): 598
- [16] Hwang Y M, Hsu H H. *International Journal of Mechanical Sciences*[J], 1998, 40(4): 371
- [17] Sezek S, Aksakal B. *Materials and Design*[J], 2008, 29(3): 584
- [18] Dođruoğlu A N. *Journal of Materials Processing Technology* [J], 2001, 110(3): 287
- [19] Shuang Yuanhua(双远华), Wang Fujie(王付杰), Wang Qinghua(王清华). *Journal of Mechanical Engineering*(机械工程学报)[J], 2017, 53(10): 7

## Mathematical Model for Asymmetrical Rolling Strain of Aluminum Alloy Plate Based on the Stream Function Method

Jiang Lianyun, Wei Yaoyu, Xue Zhiwei, Ma Qiqi, Li Heng, Ma Lifeng

(School of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

**Abstract:** Asymmetrical rolling is an important way to improve the deformation uniformity of aluminum alloy sheet as a severe plastic deformation technology. The deformation mechanism in thickness direction is difficult to be analyzed due to the characteristics of multivariable, strong coupling and nonlinearity in asymmetrical rolling of plate. In order to deeply study the deformation in the thickness direction of asymmetrical rolling, a strain calculation model along the thickness direction after asymmetrical rolling was established. The deformation zone is divided into rigid-plastic-rigid zone according to the kinematic characteristics of rolling process. On this basis, the boundary conditions of the deformation zone were modified, and the near-real velocity field was established by the stream function method. According to the minimum energy principle and linearized integration method, the rolling power consumption model was established, the multi-field and multi-parameter nonlinear coupling problem in the calculation process was solved, and the rapid calculation of the boundary model of the deformation zone was realized. Finally, the strain calculation model of asymmetrical rolling was established by combining the velocity components and strain rate components. In order to verify the asymmetrical of the theoretical model, numerical simulation and asynchronous rolling experiments were carried out. Compared with the experimental results, the maximum relative error of the calculation results is 13.44%, and the minimum relative error is 1.33%. The overall calculation time is reduced to less than 1 second. The establishment of this calculation model can provide an important theoretical reference for the quality control and prediction of asymmetrical rolling.

**Key words:** asymmetric rolling; stream function; boundary condition; rolling strain

---

Corresponding author: Ma Lifeng, Ph. D., Professor, School of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, P. R. China, Tel: 0086-351-2776769, E-mail: mlf\_zgtyust@163.com